UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Análisis de Solvencia en Anualidades de Vida con Tasas de Interés Aleatorias

Johana Osorno Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2012

Análisis de Solvencia en Anualidades de Vida con Tasas de Interés Aleatorias

Johana Osorno Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Estadística

Director:
Msc. Norman Diego Giraldo G.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2012

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico a mi madre Luz Elena y a mis abuelos Miguel Angel y Teresa, que sin importar lo que pase nunca han dejado de apoyarme y me mandan siempre todo su amor y buena energía para que todo me salga bien.

Agradecimientos

Primero, mi más sincero agradecimiento, respeto y admiración a mi asesor Norman Giraldo, quien compartió conmigo sus conocimientos y me guió y formó con las mejores herramientas académicas. Muchas gracias por su paciencia y por todo su apoyo hasta el final de mi formación.

Agradezco a todos los profesores de la Escuela de Estadística en especial a Juan Carlos Salazar por tener siempre la mejor actitud y disposición para ayudar a sus alumnos, tanto en su rol académico como administrativo, y a René Iral quien además de ser un excelente profesor se convirtió en un gran amigo.

Gracias a Protección S.A. por apoyarme y darme el tiempo necesario para poder estudiar y terminar a plena satisfacción mis estudios. Y a mi jefe y compañeros de trabajo por animarme desde el principio y colaborarme en todo lo que necesité.

Quiero agradecer también a Juan Camilo Calderón Osorio porque desde el momento en que decidí hacer la maestría me dio toda su confianza, todo su apoyo y nunca dejo de creer en mí. Gracias por sus enseñanzas, por su tiempo y múltiples trasnochadas, pero sobretodo, muchas gracias por no dejarme desfallecer cuando sentía no tener fuerzas para continuar.

Por último quiero agradecer a todas y cada una de las personas que me acompañaron y estuvieron pendientes de mi evolución académica durante estos dos años.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

Un problema fundamental en la actuaría de seguros de vida y pensiones es la determinación de las reservas necesarias para cubrir las obligaciones futuras de una Compañía en lo referente a las pensiones ó rentas vitalicias y la medición de los riesgos de incumplimiento de tales obligaciones, que incluyen el riesgo de insolvencia y el de extralongevidad.

Este problema fundamental de la actuaría es el problema de investigación de este trabajo, el cual consiste en encontrar el valor inicial de la reserva de tal forma que sea suficiente para poder realizar los pagos de una renta vitalicia teniendo en cuenta que las tasas y el tiempo de supervivencia de las personas son **variables aleatorias**.

El objeto de estudio en este trabajo es la variable aleatoria S_{N_d}, la cual representa el valor presente de una serie de pagos, las mesadas pensionales, descontados con tasas aleatorias. Esta variable es una suma aleatoria de variables aleatorias dependientes, y se define como

$$S_{N_d} = \sum_{k=1}^{N_d} r(k) \prod_{j=1}^{k} (1 + X_j)^{-1}, \tag{1}$$

donde N_d representa el tiempo de supervivencia de una persona de edad x, en días (tiempo de vida residual), y es una variable aleatoria discreta no negativa; la sucesión $(X_j, j \in \mathbb{N})$ son las tasas de interés utilizadas para descontar los pagos $r(k), k \in \mathbb{N}$, los cuales se toman como una sucesión no aleatoria que representa el pago realizado en el día k. Esta sucesión se define como:

$$r(k) = P_1(1 + i_\Delta)^{\lfloor k/360 \rfloor} I(k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 30)) \tag{2}$$

donde I(A) es una variable indicadora, con valor 1 cuando se cumple la condición A y 0 cuando no se cumple. En este caso $I(k \equiv 0(\mathrm{mod}\ 30))$ es diferente de cero cada 30 períodos (días). P_1 es el valor de la mesada mensual durante el primer año, y i_Δ es la tasa efectiva anual que indica el incremento anual de las mesadas mensuales por costo de vida.

Para modelar las tasas de interés $(X_j, j \in \mathbb{N})$ se utilizará un proceso $AR(p)$, $p > 0$, casi integrado, con errores superpuestos con una distribución NIG (Normal Inversa Gaussiana), el cual reproduce adecuadamente los rendimientos de algunos fondos de fiducia, que pueden ser similares a los rendimientos de portafolios utilizados para financiar rentas vitalicias. Y para modelar la distribución de supervivencia se utilizará la distribución de Gompertz-Makeham.

La distribución de la variable S_{N_d} es difícil de determinar analíticamente, sin embargo, aunque es posible utilizar varios tipos de aproximaciones, en este trabajo se utilizará la metodología de simulación Monte Carlo para calcularla.

Se calcula la probabilidad del riesgo de insolvencia que es de la forma $\mathbb{P}(\Pi < S_{N_d})$ donde Π es la reserva inicial, es decir, el capital ahorrado por el pensionado durante su vida laboral activa. $\mathbb{P}(\Pi < S_{N_d})$ es una probabilidad cola ("tail probability"). Su determinación correcta es de mucha importancia para las Compañías Aseguradoras. En este trabajo se calcula indirectamente mediante la determinación de los percentiles de S_{N_d}). Como esta probabilidad depende de las fluctuaciones de N_d y de $(X_j, j \in \mathbb{N})$, se puede deducir que el riesgo de insolvencia depende de desviaciones extremas de N_d y $(X_j, j \in \mathbb{N})$. Un valor extremo de N_d se puede deber a una longevidad individual. Pero estas desviaciones tienden a compensarse con casos en los cuales la supervivencia es corta. Cuando toda una generación es muy longeva se habla de riesgo de extralongevidad. Y es precisamente lo que se ha observado en los países desarrollados, como UK y USA, desde la década de los 90 en siglo pasado.

En este trabajo este riesgo se modelará modificando los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham, aunque existen otros modelos expresamente diseñados para modelar la extralongevidad, como el modelo Lee-Carter. Un valor extremo negativo, prolongado, en la serie de las tasas $(X_j, j \in \mathbb{N})$ puede generar rendimientos bajos en el portafolio con el cual se financian los pagos de las pensiones. Esta contingencia se denomina riesgo de tasas de interés. En este trabajo se analizará la distribución de S_{N_d} considerando combinaciones de los dos tipos de riesgos con el fin de observar cómo la afectan.

Finalmente, un objetivo de carácter práctico consiste en calcular el riesgo $\mathbb{P}(\Pi < S_{N_d})$ (riesgo de insolvencia) utilizando la distribución Gompertz-Makeham ajustada para las tablas de mortalidad ISS1980-1989 y ISS2010, y comparar el efecto de la nueva tabla de mortalidad colombiana ISS2010, para ambos géneros.

PALABRAS CLAVES: Rentas vitalicias, Tasas de interés estocásticas, distribución Gompertz-Makeham, riesgo de extralongevidad, riesgo de mercado (riesgo de tasas).

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

En Colombia, con la entrada en vigencia de la Ley 100 de 1993, las personas cotizantes pueden elegir, al momento de pensionarse, entre una de las Administradoras de Fondos de Pensiones - AFP's y una Empresa Aseguradora. Estas tienen en común que una persona que cumple con los requisitos exigidos para pensionarse recibe una renta mensual derivada del ahorro que ésta haya realizado a lo largo de su vida laboral; la diferencia radica en que en una AFP la persona (o más bien, su capital) debe cubrir los riesgos de mercado, riesgos de extralongevidad y las fluctuaciones de las inversiones en las que la Administradora tiene invertido el capital [1], lo cual tiene dos implicaciones: primero, que el capital puede llegar a acabarse antes de que la persona fallezca y segundo, para evitar agotamiento del capital se puede recurrir a una variación en el valor de la renta mensual (donde esta variación puede ser positiva o negativa). En el caso de la empresa aseguradora, la renta mensual que se contrata es fija con incrementos mínimos (generalmente son incrementos anuales iguales al incremento del IPC o al del Salario Mínimo Legal Vigente, dependiendo del valor de la mesada, y son pactados al inicio del contrato pensional), en este caso es la aseguradora quien se compromete a cubrir todos los riesgos que se puedan presentar.

Debido a la incertidumbre de la esperanza de vida y a los problemas derivados de las tasas de interés para las rentas garantizadas, los proveedores de anualidades y patrocinadores de los planes de pensiones han incrementado su exposición al riesgo en cuanto a que el valor presente actuarial de los futuros beneficios del retirado (sus pagos mensuales) es mucho menor que la cantidad real que se debe tener para pagar las anualidades de vida al momento de su jubilación. Una forma de combatir esto es

[1] Hay que tener en cuenta que las inversiones (y por ende los riesgos) que realizan los Fondos de Pensiones dependen del fondo que se esté administrando. Los fondos que existen son: Conservador, Moderado, de Mayor Riesgo y Retiro Programado (este corresponde a los pensionados), los cuales comenzaron a regir en el año 2011 y fueron creados con la reforma que se hizo a la Ley 1328 de 2009 sobre Multifondos. En cuanto a las Aseguradoras, las inversiones generalmente se realizan bajo un ambiente conservador.

realizar proyecciones bajo escenarios conservadores a la hora de pagar las primas, sin embargo sigue siendo difícil cuantificar el marginal que debe conservarse en la reserva para cubrir las desviaciones adversas. (Chu 2003)

Los problemas de distribución de supervivencia y el de tasas de interés en los cálculos pensionales han sido altamente estudiados y dentro de las propuestas o alternativas de solución se encuentran: asumir las tasas de interés constantes durante el tiempo que se tenga la condición de pensionado bajo dos escenarios: uno discreto y otro continuo (Broverman 1986), utilizar una combinación del método de estimación desarrollado para analizar las decisiones de las personas que enfrentan limitaciones en su capital y el modelo hazard (probabilidad de falla en tiempo continuo) (Stock and Wise 1990),calcular las reservas bajo dos escenarios: el primero es un modelo determinístico en el que solo hay una función de supervivencia y las tasas son fijas y el segundo es un modelo estocástico en el que las tasas siguen un proceso estocástico y/o se pueden considerar escenarios aleatorios de mortalidad (Chu 2003), aplicar el concepto de comonotonicidad el cual se utiliza para determinar aproximaciones para las sumas de variables aleatorias independientes cuando las distribuciones de los términos son conocidos (Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, and Vyncke 2001).

En este estudio se discutirá el caso de la empresa Aseguradora, específicamente en el cálculo del valor inicial de la prima que debe tener una persona para disminuir el costo en el que incurría la empresa dado el caso en el que se presentaran riesgos de extralongevidad y/o de tasas de interés. Esto es, se debe hallar el valor inicial de la reserva de tal forma que ésta sea suficiente para realizar los pagos de las rentas mensuales durante todo el tiempo de supervivencia de la persona, teniendo en cuenta que las tasas y dicho tiempo de supervivencia son variables aleatorias. Para modelar la distribución de supervivencia de las personas se utilizará la distribución Gompertz-Makeham y para las tasas de rendimientos se asumirá un modelo estocástico conformado por un proceso AR(p), $p > 1$, estacionario en covarianza, gaussiano, ergódico, casi estacionario, donde los errores del proceso se distribuyen iid N $(0, \sigma^2)$ y los errores del modelo estocástico se distribuyen iid NIG $(\mu, \alpha, \beta, \delta)$. Ahora, para hallar la distribución del valor presente de las mesadas pensionales, pagadas a una persona durante el tiempo que sobreviva, capitalizadas con base en las tasas, se recurrirá a la simulación Monte Carlo (ya que analíticamente no es posible hallarla).

El desarrollo de este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se hace una revisión de la literatura relacionada. En el Capítulo 3 se introduce la distribución Gompertz-Makeham (GM) y las Tablas de Vida. En el Capítulo 4 se analizan algunos casos de anualidades ciertas en los que la duración de la misma y los pagos son aleatorios. En el Capítulo 5 se analizan las anualidades de vida con tasas aleatorias. En el Capítulo 6 se realizan las simulaciones para estudiar el efecto de movimientos adversos en las tasas, así como el caso de extralongevidad. En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones de este trabajo.

1.2. Planteamiento del Problema y su Desarrollo

Como se mencionó en el Resumen, la variable aleatoria objeto de este trabajo se define como

$$S_{N_d} = \sum_{k=1}^{N_d} r(k) \prod_{j=1}^{k} (1 + X_j)^{-1}. \tag{1.1}$$

Esta variable está asociada a un flujo de caja, al inicio de la etapa de pensión de una persona de edad (x). Se asume que el capital con el cual se financia la pensión está invertido en un Fondo determinado, en una cuenta individual. Se define $F(k)$ el saldo de la cuenta de esta persona en el fondo, en el período (día) k, como una sucesión que evoluciona mediante la ecuación recursiva siguiente (flujo de caja):

$$F(k) = (1 + X_j)F(k-1) - r_k. \tag{1.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N_d$, donde N_d es la vida residual de una persona de edad x al momento de jubilarse, en días. El valor de los pagos o mesadas pensionales están dadas por $r(k) = P_1(1 + i_\Delta)^{\lfloor k/360 \rfloor}$ y P_k es el valor de la mesada mensual durante el año k.

La definición de N_d requiere algunos detalles. Para una persona de edad x, se define la variable $T(x)$ como la vida residual, en escala continua, de esta persona, dado que estaba viva a la edad x. Se asume que $T(x)$ tiene la siguiente distribución.

Definición 1.2.1. *Se define la variable $T(x)$ como la vida residual, en escala continua, de una persona de edad x, que está viva a esta edad, y se asume que $T(x)$ es una variable positiva continua que tiene una distribución Gompertz-Makeham con parámetros (s, g, c), indicado $T(x) \sim GM(s, g, c)$, dada por*

$$P(T(x) > t) = s^t g^{c^x(c^t - 1)},\ t \geq 0. \tag{1.3}$$

Si $\lfloor z \rfloor$ denota la función parte entera de z, ó función "piso", se define la variable aleatoria $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$, con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Además, si se define la variable aleatoria $S(x) = \lfloor 12\, U(0,1) \rfloor$, donde $U(0,1)$ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0,1]$, independiente de $K(x)$, entonces se define la siguiente variable aleatoria.

Definición 1.2.2. *Se define la variable aleatoria N_d como*

$$N_d = 30(12K(x) + S(x)), \tag{1.4}$$

representa el tiempo de supervivencia de la vida (x) en días.

Para plantear el problema se introducen algunas definiciones adicionales.

Suponga una anualidad con m pagos vencidos y m capitalizaciones al año, invertida en un fondo a la tasa efectiva variable X_j. La duración es a N_d periodos, donde N_d es una variable aleatoria distribuída

Gompertz-Makeham con parámetros (s, g, c). El valor de los pagos vencidos se indicaron por $r(k)$. El saldo de la cuenta de donde se pagan las anualidades está dado en (1.2).

A partir de las tasa aleatorias $X_j, j = 1, 2, \dots$ se definen las variables

$$\begin{aligned} Z_k &= 1/(1+X_j) \\ Y_k &= Z_1 Z_2 ... Z_k = 1/\prod_{j=1}^{k}(1+X_j). \end{aligned}$$

Y se define el saldo de la cuenta al final del período k como la solución de la ecuación (1.2), $F(k)$. Entonces se cumple que

$$F(k) = Y_k^{-1}(F(0) - S_k),\ k = 1, \dots, N_d, \tag{1.5}$$

donde $S_k = \sum_{s=1}^{k} r(s) \prod_{j=1}^{s}(1+X_j)^{-1}$. El valor $F(0)$ se define como el valor de la anualidad y corresponde al capital que se estimó como necesario para financiar la pensión de la persona de edad (x). Como se anotó en el Resumen, este valor también se indica por $\Pi = F(0)$. Como el flujo dura hasta la vida de la persona de edad x, se tiene que en $k = N_d$ debería darse una condición de cierre, que consiste en que el capital se agote en ese momento. A partir de (1.5) se obtiene

$$Y_{N_d} F(N_d) = \Pi - S_{N_d}. \tag{1.6}$$

En los cálculos actuariales se escoge el valor P_1 de tal forma que se cumpla

$$\mathbb{E}((Y_{N_d} F(N_d)) = \Pi - \mathbb{E}(S_{N_d}) = 0.$$

Es decir, $\Pi = \mathbb{E}(S_{N_d})$. Pero el cálculo se hace asumiendo condiciones de mortalidad más severas y tasas de interés más bajas; por ejemplo, se toma el valor de $\mathbb{E}(X_j)$ más bajo que el estimado. En esta tesis se utiliza una estrategia equivalente que consiste en escoger P_1 de tal forma que $\mathbb{P}(\Pi < S_{N_d}) = \alpha$ sea muy pequeño; por ejemplo, tal que $\alpha = 0.001$.

Definición 1.2.3. *El evento* $(\Pi < S_{N_d})$ *se define como el riesgo de insolvencia.*

El objetivo de esta tesis es evaluar la distribución de la variable aleatoria S_{N_d}, de manera que se puedan determinar sus percentiles superiores. Se analizan varias opciones. Por ejemplo, asumiendo que P_1 es igual a un salario mínimo legal mensual, se encuentran los percentiles de S_{N_d}. Los cálculos en esta tesis dependen de una serie de parámetros, que corresponden al modelo para la GM, (s, g, c), y a los del modelo escogido para las tasas de interés X_j. En el Capítulo 6 se justifican los parámetros para que los cálculos del valor de una renta vitalicia por un salario mínimo legal mensual sean lo más realistas posibles.

El modelo para las tasas $X_k, k = 1, 2, \dots$, se define mediante el sistema de espacio de estados siguiente.

$$\begin{aligned} U_k &= \varphi_0 + \varphi_1 U_{k-1} + \dots + \varphi_p U_{k-p} + \epsilon_k, \\ X_k &= U_k + \eta_k, \end{aligned} \tag{1.7}$$

con U_k un proceso AR(p), $p > 1$, estacionario en covarianza, gaussiano, ergódico, casi-estacionario, $\epsilon_k \sim iid\, N(0, \sigma^2)$ es una sucesión de variables normales y $\eta_k \sim iid\, NIG(\mu, \alpha, \beta, \delta)$. Los errores ϵ_k y η_k se asumen independientes.

La justificación de este modelo es que proviene del ajuste de rendimientos de portafolios de fiducias entre 2000 y 2009, y representa aproximadamente los rendimientos de un portafolio de pensiones obligatorias.

Los parámetros para el modelo anterior se obtendrá a partir de series de tiempo de rendimientos de fondos de fiducia. La estimacion de los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham se obtiene a partir de la regresión de la tasa central de mortalidad $[my]$ contra x (utilizando el método de mínimos cuadrados no lineales), con base en las tablas de vida de Colombia, una basadas en las experiencias del ISS entre 1980-1989, y en la tabla 2010. El riesgo de extralongevidad se puede medir calculando los valores de los percentiles de S_{N_d} para un mismo nivel de tasas de interés, y utilizando las tablas 89-89 y 2010. Se puede igualmente calcular el riesgo de tasa de interés considerando el valor de la media $\mathbb{E}(X_k) = \varphi_0/(1 - \sum_j = 1^p \varphi_j$. Al disminuír este valor se obtienen condiciones más extremas que aumentan el valor de los percentiles de la variable S_{N_d}.

La metodología para el cálculo del riesgo de insolvencia se hará inicialmente mediante simulación debido a la complejidad de la distribución de la variable S_{N_d}.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

El objetivo de este capítulo es introducir el tema de las tasas de interés estocásticas y anualidades de vida, mostrando cómo ha sido la evolución del estudio de estos temas a través del tiempo.

2.1. Distribución Gompertz - Makeham

Mereu (1965) expresa las funciones de contingencias de vida a través de ecuaciones matemáticas. En su trabajo desarrolla una fórmula para las anualidades continuas en términos de los parámetros de la función Makeham y la fuerza de interés. Los supuestos utilizados para el estudio son: las mejoras en la tasa y en la fuerza de mortalidad se pueden deber a que tienen la misma magnitud, asumir que no hay una mejora en el parámetro A (el cual hace referencia al riesgo de muerte por accidente) no es significativo y las escalas de proyección pueden ser libremente ajustadas para adaptarse al método de aplicación sin que sobrepase los parámetros que se desean mejorar (sin que estos sean ajustados).

Carriere (1995) investiga la función de distribución Gompertz y da aproximaciones de su media, varianza, asimetría y curtosis. Es bien conocido que este modelo proporciona una excelente descripción de los patrones de mortalidad en la edad adulta. Demuestra que esta ley realmente explica el patrón de mortalidad de la valoración de las tablas de mortalidad y estima los parámetros de la Gompertz con la valoración de las tasas de mortalidad. Además demuestra que una asunción Gompertz es mucho más precisa en estos cálculos para edades fraccionadas que para Distribuciones Uniformes

2.2. Anualidades de Vida

Broverman (1986) investiga varias propiedades de la tasa interna de retorno (calculada como un promedio anual de los rendimientos sobre el tiempo de vigencia del contrato, donde la media de los rendimientos anuales puede ser una tasa de interés efectiva anual o una fuerza de interes anual) y las variaciones que se dan continuamente en las variables aleatorias basados en los pagos continuos o al momento de la muerte. Broverman desarrolló de una fórmula para la prima neta individual para los seguros de vida y las anualidades basado en dos componentes: 1) la distribución de supervivencia, 2) una valoración de la tasa de interes (asumiendo que es constante durante el tiempo que tenga la condición de asegurado). Acá el autor define las anualidades de vida discretas y continuas, y las compara bajo las dos componentes mencionadas anteriormente.

Stock and Wise (1990) muestran la diferencia en los beneficios que otorga una firma en su plan de pensiones por un retiro temprano vs los beneficios recibidos por un retiro a la edad de pensión. Se asume que una persona que tiene un retiro temprano tiene mayores beneficios que una persona que se demora más tiempo en retirarse y decide continuar trabajando. Uno de los objetivos importantes es el desarrollo de un modelo que pueda ser usado para predecir los efectos en el retiro de cambios potenciales en las provisiones del plan de pensiones. El modelo utilizado es una combinación del método de estimación desarrollado para analizar las decisiones de las personas que enfrentan limitaciones en su capital y el modelo hazard (probabilidad de falla en tiempo continuo).

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, and Vyncke (2001) en su artículo introducen el concepto de comonotonicidad con el objetivo de solucionar la necesidad de determinar las funciones de distribución de sumas de variables aleatorias independientes (lo cual surge con la introducción de los aspectos estocásticos financieros en los modelos actuariales). Ellos utilizan este concepto para determinar aproximaciones para las sumas de variables aleatorias cuando las distribuciones de los términos son conocidos, pero la dependencia de la estructura estocástica entre los términos es desconocida o también incomoda para trabajar con ella.

Chu (2003) determina la magnitud de la reserva necesaria para cubrir: fluctuaciones aleatorias en la esperanza de vida, riesgo de longevidad y riesgo de inversión. Calcula las reservas utilizando simulación estocástica bajo dos escenarios: un modelo deterministico y un modelo estocástico. Bajo el modelo deterministico se asume solo una función de supervivencia y tasas de interes fijas, bajo el modelo estocástico las tasas pueden seguir un proceso estocástico y/o se pueden considerar escenarios aleatorios de mortalidad

En el 2008, **Feng Li** obtiene una distribución aproximada para una anualidad vida entera por medio de un enfoque recursivo introducido por Parker (1993a) la cual demostró que era mucho mejor que la distribución Gamma inversa, particularmente para percentiles muy altos o muy bajos utilizando varias estrategias de colocación de activos. En cuanto a la probabilidad de ruina, demostró que las mujeres tienden a tener una mayor probabilidad de ruina que los hombres cuando se encuentran bajo las mismas condiciones. Además, el autor utilizó un modelo Ornstein-Uhlenbeck para modelar las tasas de interés, como este modelo incluye la tasa de retorno inicial se pudo estudiar sus impactos en el problema de la ruina y concluye que el retorno en los primeros años es crucial para el resto de tiempo de desacumulación de capital (fase de jubilación).

2.3. Tasas de Interés Estocásticas

Unas de las primeras personas en hablar de este tema fueron Panjer and R. (1980) quienes desarrollaron un marco teórico probabilístico para determinar los momentos de los valores acumulados de los flujos de caja deterministicos y estocásticos aplicados a anualidades de vida y seguros de vida. Una de las desventajas de este estudio es que los modelos de tasas de interes eran independientes de si las tasas eran actuales o pasadas, es por esto que continuaron con su estudio y publicaron la continuación de este primer paper. En esta continuación, Panjer and R. (1981) consideraron un proceso autorregresivo estacionario de cualquier orden para la fuerza de interes a través del cual proporcionaron un método general para obtener los dos primeros momentos de seguros de vida y funciones de anualidades.

Giaccotto (1986) realiza un estudio en el que desarrolla una metodología general para el análisis de las funciones de seguros cuando las tasas de interés son estacionarias o no estacionarias, además aplica una metodología de tiempo continuo al problema de los flujos de caja discontinuos.

Parker (1993a) realiza una comparación de dos enfoques existentes en la literatura: el modelamiento de la función de acumulación de la fuerza de interés vs el modelamiento de la fuerza de interés, debido a que bajo condiciones estocásticas estos modelos son diferentes (bajo el modelo determinístico estos enfoques son equivalentes). En este artículo el autor argumenta que el modelamiento de la fuerza de interés tiene algunas ventajas si es observado bajo unas condiciones particulares de la función de acumulación de la fuerza de interés.

Parker (1993b) estudia los valores presentes de flujos de caja futuros los cuales son tratados como variables aleatorias (ya que se consideró que las tasas de interés futuras varían de forma estocástica), y presenta los tres primeros momentos de éstos y su función de distribución acumulada. Para modelar la fuerza de interés utiliza 3 modelos estocásticos: Ruido Blanco, Wiener y Ornstein-Uhlenbeck y concluye que la elección del proceso estocástico que se utilice para modelar las tasas tiene un significativo impacto en la distribución del valor presente de los flujos de caja futuros.

Luego, Lai and Frees (1995) pretenden dar solución al problema fundamental de la actuaria que es el encontrar las reservas necesarias para poder cumplir con las obligaciones futuras. Para hacerlo utilizan los siguientes dos modelos estocásticos para las tasas de interés: los modelos lineales tradicionales ARIMA y los procesos estocásticos no lineales condicionalmente heterosedasticos ARCH. Acá, los autores encontraron que en general la reserva del siguiente periodo es una función de la tasa de interes previa. Sin embargo esto no es cierto cuando la fuerza de interes puede ser modelada como un proceso de ruido blanco.

Capítulo 3

Distribución de Supervivencia Gompertz-Makeham y Tablas de Vida

En este capítulo se introducen las definiciones de la distribución Gompertz-Makeham (GM) y las tablas de vida, ambas utilizadas en este estudio para realizar las simulaciones de las funciones de supervivencia. Cabe anotar que la diferencia que existe entre estos dos métodos es que la distribución GM permite modificar sus parámetros para poder realizar simulaciones bajo distintos escenarios mientras que con las tablas de vida esto no puede hacerse.

3.1. La distribución Gompertz-Makeham

Si se define la variable aleatoria T como la duración de una vida humana, sin hacer distinción de género, entonces asumimos que $\mathbb{P}(T \leq 110) = 1$ ([1]). Dado que una vida humana alcance a sobrevivir la edad x se define la variable condicional $T(x) = T - x | T > x$ como la vida remanente de la vida (x). Entonces $T(x) \in (0, 110 - x]$. Un modelo probabilístico para la variable $T(x)$ es la Distribución de Gompertz-Makeham. Para su definición se utiliza el concepto de fuerza de mortalidad. Asumiendo que la variable $T(x)$ es absolutamente continua con función de distribución $G(t) = \mathbb{P}(T(x) \leq t)$ y función de densidad $g(t) = G'(t)$, la función fuerza de mortalidad se define como $\mu(t) = g(t)/(1 - G(t)$. Como se sabe, esta función corresponde a la probabilidad

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t \leq T(x) < t + h | T(x) > t) \tag{3.1}$$

es decir, la fuerza de mortalidad en t para una vida (x) mide el riesgo de fallecer en un intervalo de tiempo muy pequeño $[t, t + h)$, dado que se sobrevive a la edad t .

[1] el parámetro de edad hasta los 110 años se utiliza debido a que este es el límite que tienen las tablas de vida en el caso colombiano

La distribución Gompertz-Makeham se define a partir de la fuerza de mortalidad colocando

$$\mu_{x+t} = A + B\,C^{x+t}. \tag{3.2}$$

Una parametrización equivalente, utilizada en la librería de R, eha, es

$$\mu_{x+t} = a_2 + a_1 e^{(x+t)/b}, \tag{3.3}$$

donde a_1, a_2 se declaran como parámetros de forma y b es el parámetro de escala. En la fórmula (3.2), el parámetro A mide la fuerza constante de mortalidad por riesgo de accidente, que es diferente al riesgo de envejecimiento y se aproxima a la distribución exponencial, y el término BC^{x+t} es fuerza de mortalidad por envejecimiento. Es claro que $C = e^{1/b}$.

Una forma equivalente de mostrar la fuerza de mortalidad a partir de la distribución Gompertz-Makeham es $\lambda_x = \lambda + \frac{1}{b}e^{\frac{(x-m)}{b}}$ donde λ es una constante positiva, m es el parámetro de localización y b el de escala. Así, $A = \lambda$, $B = e^{\frac{-m}{b}}$ y $C = e^{\frac{1}{b}}$. Además la probabilidad de supervivencia sería ${}_tp_x = \exp(-\lambda t - \frac{1}{b}\int_x^{x+t} e^{\frac{s-m}{b}} ds) = \exp(-\lambda t + b(\lambda_x - \lambda)(1 - e^{\frac{t}{b}}))$ (Charupat and Milevsky, 2001)

Con resultados de la teoría básica se tiene la identidad siguiente para la función de supervivencia.

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds} \\ &= e^{-\int_0^t A+BC^{x+s}ds} \\ &= e^{-At}(e^{-\frac{B}{lnC}})^{C^x(C^t-1)} \\ &= s^t g^{C^x(C^t-1)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde los parámetros (A, B, C) se pueden reparametrizar por (s, g, C). Por tanto, se indica que $T(x)$ sigue una distribución Gompertz-Makeham (GM) por $T(x) \sim GM(A, B, C)$. También se utilizan las parametrizaciones equivalentes, (a_1, a_2, b) y (s, g, C).

Se puede expresar μ_{x+t} en función de s, g, y C como

$$\mu_{x+t} = \ln(s^{-1}) + \ln(C)\ln(g^{-1})C^{x+t}. \tag{3.5}$$

3.2. Tablas de Vida

Las *Tabla de vida* son estimadores no paramétricos de la distribución de supervivencia y sirven para calcular la probabilidad de que una persona sobrevia t años. Es una herramienta estadística que permite utilizar modelos de extendida aplicación en los análisis demográficos. Uno de los usos más importantes es que este tipo de herramientas permiten describir y medir el efecto de la mortalidad sobre una población, divida por grupos de edad y género, para así poder calcular estimaciones y probabilidades de su evolución en un periodo determinado.

En Colombia las Tablas de vida son responsabilidad de la Superintendencia Financiera de Colombia, la cual hizo una actualización a las mismas el 30 de Julio de 2010 a través de la resolución 1555 de

2010. La actualización se realizó por un notable incremento en la esperanza de vida de los colombianos derivada más que todo por los avances en la medicina, mayores estándares de vida y mejores sistemas de salud pública, ver Zarruk and Cardoso (2010, pag 20).

Las entidades obligadas a utilizar estas tablas son las entidades administradoras del Sistema General de Pensiones, del Sistema General de Riesgos Profesionales y las aseguradoras de vida, para la elaboración de sus productos y de los cálculos actuariales que se deriven de los mismos.

La Superintendencia Financiera realiza el cálculo utilizando el método de Makeham,el cual asume la fuerza de mortalidad como $\mu_x = A + Bc^x$ [2], con $p_x = exp(a + bc^x)$ (probabilidad de sobrevivir durante el siguiente año), ver Zarruk and Cardoso (2010).

Milevsky (2000) muestran la función de las tablas de vida para la mortalidad, de la siguiente forma: ${}_tp_x = P(T > t|m, l, x) = \exp(\exp\left(\frac{x-m}{l}\right)(1 - \exp\left(\frac{t}{l}\right)))$ donde: m parámetro de localización, l parámetro de escala y T variable aleatoria que hace referencia al tiempo futuro de vida de una persona de edad x.

La siguiente gráfica es presentada por Zarruk and Cardoso (2010) y corresponde a las tasas de mortalidad colombiana (observadas por edad y género), construida a partir de los datos que el ISS [3] proporciona a la Superintendencia Financiera de Colombia [4].De la gráfica se observa que, en general, las probabilidades de muerte aumentan con la edad y que las mujeres son más longevas (es decir, viven más tiempo) que los hombres:

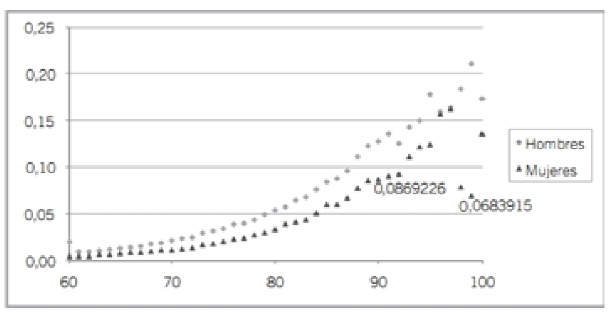


Figura 3.1: Tasas de mortalidad observadas

El ejemplo que se resalta en la gráfica es que la probabiliadad de que una mujer de 99 años de edad muera antes de cumplir los 100 años es menor a la probabilidad de que una mujer de 90 años muera antes de cumplir los 91 (esto es: $0.0684 = q_{99} < q_{90} = 0.0869$).

Para observar el cambio que se dio en la esperanza de vida ($e^o(x)$) con la actualización de las tablas

[2] x edad de la persona

[3] Instituto de Seguros Sociales

[4] Sólo se tienen en cuenta los datos del ISS y no de los Fondos de pensión debido a que esta institución tiene el 99 % de los pensionados por vejez en Colombia

de mortalidad de rentistas se muestra la siguiente tabla, tomando como base la edad actual de pensión del Régimen de Prima Media con Prestación Definida: 57 años mujeres y 62 años hombres.[5]

PARÁMETROS	HOMBRES		MUJERES	
	Tablas 80-89	Tablas 2010	Tablas 80-89	Tablas 2010
x	62	62	57	57
$l(x)$	85.303	897.019	91.600	959.851
$d(x)$	1.362	8.250	714	3.189
$q(x)$	0.015966	0.009197	0.007794	0.003322
$e^o(x)$	**18.5**	**21.3**	**23.7**	**29.7**

Cuadro 3.1: Comparación Hombres y Mujeres con Tablas 80-89 vs. Tablas 2010

dónde:

x : Edad actuarial

$l(x)$:Indica el número de sobrevivientes a la edad x tomando un grupo inicial supuesto: 100.000 para las tablas 80-89 y de 1´000.000 para las tablas 2010, de personas de edad 15 años.

$d(x)$:Indica el número esperado de personas que fallecen a la edad x , sin alcanzar la edad $(x + 1)$, donde $d(x) = l(x) - l(x + 1)$

$q(x)$: Indica la probabilidad de fallecer a la edad x , sin alcanzar la edad $(x + 1)$. Esto es, $q(x) = d(x)/l(x)$

$e^o(x)$:Vida media Completa. Años esperados de vida de una persona de edad x , antes de morir.

Del cuadro 3.1 se pueden observar varios resultados:

- La esperanza de vida para los hombres con las tablas ISS8089 era de 80.5 años y pasó a 83.3 años con las tablas ISS2010. Esto representa un incremento en la esperanza de vida de 2.8 años

- La esperanza de vida para las mujeres con las tablas ISS8089 era de 80.7 años y pasó a 86.7 años con las tablas ISS2010. Esto representa un incremento en la esperanza de vida de 6 años

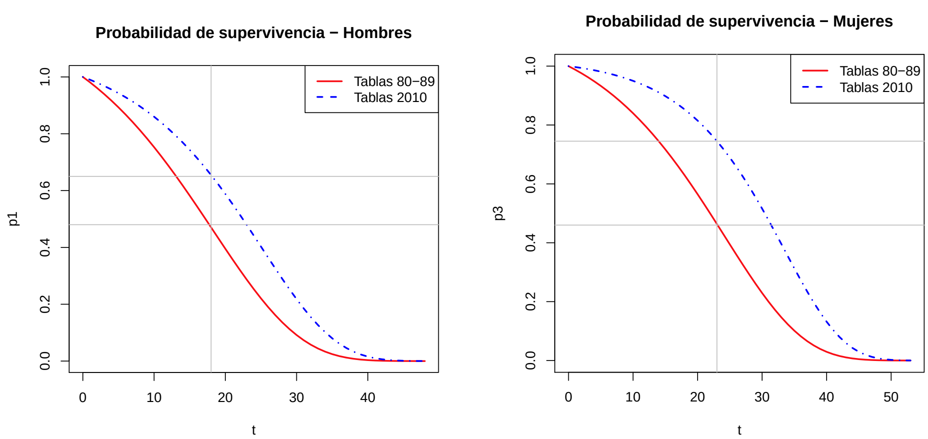
[5]es importante tener en cuenta que la diferencia en escala de los parámetros $l(x)$ y $q(x)$ se debe a que las tablas fueron construidas bajo una base de número de personas diferente, esto es, la tabla 80-89 se construyo con una base de 100.000 personas y la tabla 2010 con una base de 1.000.000 de personas, sin embargo esto no afecta el cálculo del parámetro de esperanza de vida $e^o(x)$

- Teniendo en cuenta las edades de pensión de cada género y comparando su esperanza de vida con las nuevas tablas de mortalidad (Tablas 2010) se puede ver que al momento de la pensión la esperanza de vida de las mujeres es 8.4 años mayor que la de los hombres

Es importante tener en cuenta el cuadro 3.1 ya que este trabajo se basa en el análisis de las anualidades para las personas que cumplen con la edad de pensión (H:62 y M:57) y tiene como objetivo central determinar el incremento del valor de la reserva inicial de una persona debido a la presencia de riesgo de extralongevidad y tasas de interés.

3.3. Distribución de Supervivencia por Género

Las siguientes son las distribuciones de supervivencia para cada género construidas con las tablas de mortalidad colombianas:



(a) Distribución de supervivencia - Hombres (b) Distribución de supervivencia - Mujeres

Figura 3.2: Distribuciones de supervivencia.

De las gráficas se puede concluir que:

- La probabilidad de que un hombre de 62 años sobreviviera a los 80 años era de 46.5 % con las tablas 80-89, ahora con las tablas 2010 esta probabilidad incrementó a 65 %.
- La probabilidad de que una mujer de 57 años sobreviviera a los 80 años era de 47 % con las tablas 80-89, ahora con las tablas 2010 esta probabilidad incrementó a 74.5 %.
- Cuando se analiza el caso en el que ambos géneros tienen la misma edad, se comprueba que la probabilidad de supervivencia de las mujeres es mayor que la de los hombres y que además

ésta probabilidad incrementó con las nuevas tablas. El ejercicio numérico se plantea hallando la probabilidad de supervivencis de que un/una hombre/mujer con 70 años sobreviva hasta los 80 años, esto es ${}_{10}p_{70}$, el resultado fue que, para hombres la probabilidad en las tablas 80-89 era de 56.5 % y con las tablas 2010 es de 73.5 % (incremento de un 30 % en la probabilidad), y para mujeres la probabilidad de supervivencia en las tablas 80-89 era de 60 % y con las tablas 2010 es de 81 % (incremento de un 35 % en la probabilidad). Con esto se muestra que no solo las nuevas tablas de mortalidad de rentistas 2010 evidenciaron el incremento de la probabilidad de supervivencia para cada género sino también que el incremento para las mujeres fue más alto que para los hombres (en términos generales, las mujeres están siendo más longevas, es decir, están viviendo más tiempo que los hombres)

3.4. Comparación de Tablas de Vida

La siguiente es una gráfica que muestra la comparación de las tablas de vida utilizando las nuevas tablas de rentistas para Colombia, las tablas de Mexico que están desactualizadas (datan de 1997) y las tablas de Chile que son recientes (2004)

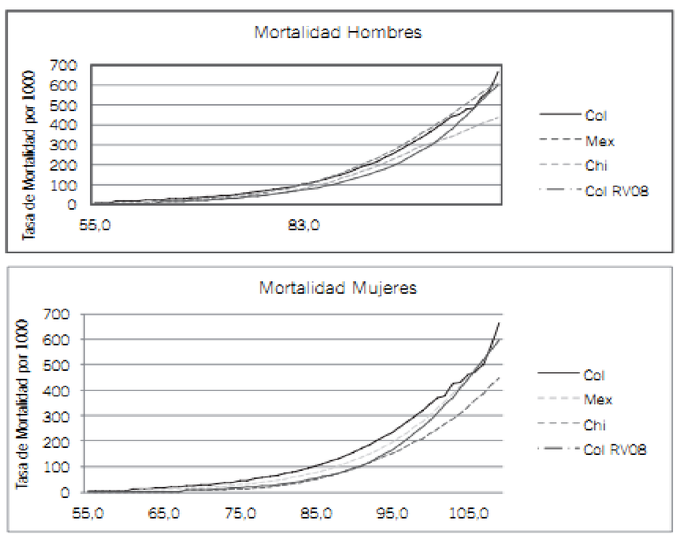


Figura 3.3: Comparación de tablas Colombia, Chile y México

(Zarruk and Cardoso 2010)

Se puede observar que para las edades entre 80 y 90 años, la mortalidad de los hombres es menor en Colombia que en Chile y México, mientras que para las mujeres, su mortalidad es más parecida a la de Chile y menor a la de México.

Capítulo 4

Anualidades con Elementos Aleatorios

En este capítulo se considerarán dos casos de anualidades en las cuales algunos de sus elementos son variables aleatorias. En el primero los pagos $r(k)$ se asumen variables iid Bernoulli(p), lo cual sirve para modelar por ejemplo, una cuenta de ahorros. Otro caso de interés consiste en suponer que la duración de la anualidad es aleatoria, colocando $n \sim Poisson(\lambda)$, y los pagos aleatorios, colocando $r(k) \sim iidN(\mu, \sigma^2)$. En ambos casos el valor presente S_n es una variable aleatoria. Y el objetivo del análisis es mostrar algunas de las técnicas de análisis para calcular la distribución de esta variable.[1]

4.1. Definición de Anualidad

Dentro de los ejemplos más conocidos de anualidades se encuentran los sistemas de amortización de crédito, las pensiones en el ISS (Régimen de Prima Media) y las pensiones o rentas vitalicias en el Régimen de Ahorro Individual.

Hay evidencia de ventas de anualidades en la Roma del siglo III. Y también hay evidencia de una ley inglesa de 1540 que fijaba el precio una anualidad de vida. Determinar el precio justo de una anualidad de vida (es decir, determinar los pagos anuales de por vida) fué un problema de mucho interés para los gobiernos de los Estados Generales de Holanda y de Inglaterra al final del siglo XVII, y atrajo la atención de los principales matemáticos y estadísticos de la época, como Leibniz, Euler, DeMoivre, DeWitt, Hugyens, Simpson, Huddle, entre otros, y contribuyó de manera significativa a la consolidación de teoría de la probabilidad, tanto ó más que los problemas sobre juegos de azar, ver el capítulo 13 “Rentas Anuales”, de Hacking (1995).

[1] Es posible utilizar otros ejemplos tales como: asumir $N = K_x$, donde K_x son los pagos de pensión aleatorios que se realizan en el Regimen de Ahorro Individual; Bonos con cupones mes dtf + 2 puntos, con redención por sorteos, donde x=mes y la duración y los pagos son aleatorios; entre otros

Una razón por la cual el concepto de anualidad está en el centro de los debates actuales sobre los sistemas pensionales es que las reformas pensionales buscan eliminar la forma de pensión de los sistemas públicos , que es una anualidad, en el sentido de que sus pagos se pre-determinan al inicio del contrato mediante una fórmula específica, por ejemplo, en el caso del régimen de la Ley 100/93 en Colombia, de Prima Media con Prestación Definida, esta última descripción, “Prestación Definida” se refiere a que los pagos se harán de una manera definida. En cambio, otra de la figuras, incluída en el Sistema de Ahorro Individual, denominada “retiro programado”, es una anualidad en la cual los pagos no están pre-definidos sino que dependen del desempeño de un fondo de inversiones. En ese sentido se habla de “anualidades variables”, una traducción del término “variable annuities”, utilizado en países como los EUA.

Las anualidades son productos financieros que se describen como un contrato entre dos partes, el Emisor (Banco, Compañía de Seguros) y el comprador ó titular (persona natural, pensionado), en el cual el titular paga al Emisor una cantidad fija Π a cambio de una serie de pagos $r(k), k = 1, 2, \ldots$, especificando de antemano las fechas y monto de los mismos, los cuales tienen una duración determinada ó no. En este último caso la duración puede ser aleatoria, como es el caso de una anualidad de vida ó renta vitalicia, la cual paga hasta el fallecimiento del titular ó de sus supervivientes. Las anualidades se conocen también como rentas. Son productos financieros similares a los bonos. Y como tales deben tener un valor de mercado. Es decir, el precio al cual el Emisor las ofrece en el mercado financiero. La fórmula de la matemática financiera para el valor valor presente de los pagos, vencidos, durante n períodos, es una primera opción para fijar el precio de la anualidad.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} r(k), \tag{4.1}$$

donde el Emisor garantiza la tasa i, y los pagos $r(k)$ y el titular paga una cantidad $\Pi \geq S_n$ que es como mínimo el valor presente de la anualidad S_n. El símbolo actuarial para el valor presente cuando $r(k) \equiv 1$ es $a_{\overline{n}|i}$. Una manera equivalente de definir una anualidad es a través de un flujo de caja, definido como el valor del saldo de la deuda del emisor al final de cada período de pago. Si el saldo se denota por $F(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, se cumple

$$F(k) = (1+i)F(k) - r(k), \tag{4.2}$$

donde la tasa i es efectiva para cada período entre pagos, y se cumple la condición $F(n) = 0$, con $F(0) = a_{\overline{n}|i}$. Es decir, hay un número igual de capitalizaciones y pagos. O, de manera equivalente, los intereses se adjudican a la cuenta en las mismas fechas de los pagos. Esto no necesariamente ocurre así siempre. Es necesario considerar períodos de capitalización con una frecuencia mayor a los de pagos. Por ejemplo, capitalización diaria y pagos mes vencido.

4.2. Anualidades con Pagos Aleatorios

Suponemos una anualidad vencida con m pagos y m capitalizaciones al año, a la tasa efectiva i_m, durante n años, con pagos vencidos de 1, pero que ocurren aleatoriamente con probabilidad $p \in [0,1]$. Es decir, en cada período hay un retiro de 1 con una probabilidad p, y no se retira con probabilidad $1-p$.

El saldo de la cuenta al final del período k es $F(k)$ donde $F(k) = (1+i_m)F(k-1) - X(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, nm$.

La condición de terminación (de cierre) de la anualidad se toma como $\mathbb{E}(F(nm)) = 0$.

Definiendo la tasa $1+i = (1+i_m)^m$, la solución cumple

$$F(k) = (1+i_m)^k (F(0) - \sum_{j=1}^{k} (1+i_m)^{-j} X_j).$$

Reemplazando $(1+i_m)^{-j} = (1+i)^{-j/m} = v^{j/m}$ se obtiene de la condición de cierre

$$F(0) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{nm} v^{j/m} X_j\right).$$

Se define el Valor Presente de la anualidad como la variable aleatoria $S_n = \sum_{j=1}^{nm} v^{j/m} X_j$, que es una combinación lineal de variables iid Bernoulli(p).

Media y Varianza del Valor Presente S_n

Por propiedades de la esperanza y como $v^{\frac{j}{m}}$ es una constante entonces

$$E(S_n) = E\left(\sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} X(j)\right) = \sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} E(X(j)).$$

Ahora como $E(X(j)) = p$, entonces se puede concluir de la media que:

$$E(S_n) = E\left(\sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} X(j)\right)$$
$$E(S_n) = \sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} E(X(j))$$
$$E(S_n) = p \sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}}$$

de la serie geométrica se obtiene que:

$$\sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} = \sum_{j=1}^{nm} (v^{\frac{1}{m}})^j = \frac{1-v^n}{v^{-\frac{1}{m}}-1}$$

de donde concluimos que $\mu_n = E(S_n) = \frac{p(1-v^n)}{v^{-\frac{1}{m}}-1}$

Ahora

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= Var\left(\sum_{j=1}^{nm} v^{\frac{j}{m}} X(j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{nm} (v^{\frac{j}{m}})^2 Var(X(j)) \\ &= p(1-p)\sum_{j=1}^{nm} (v^{\frac{2}{m}})^j \end{aligned}$$

pero

$$\sum_{j=1}^{nm} (v^{\frac{2}{m}})^j = \frac{1-v^{2n}}{v^{-\frac{2}{m}}-1}$$

luego

$$\sigma_n^2 = Var(S_n) = \frac{p(1-p)(1-v^{2n})}{v^{-\frac{2}{m}}-1}.$$

Percentil $(1-\alpha)$ de S_n

Ahora se halla el percentil 0.95 del valor presente S_n, $p_{S_n}(0.95)$, para evaluar el riesgo de insolvencia; es decir, hallando $p_{S_n}(0.95)$ se tiene que $\mathbb{P}(p_{S_n}(0.95) < S_n) = 0.05$. Como la variable S_n es una suma ponderada de variables iid se puede utilizar el teorema del límite central para obtener una aproximación normal y así calcular el percentil utilizando el correspondiente de una normal.

Esto es, suponemos que n es suficientemente grande como para garantizar $S_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$, aproximadamente. Y $\mathbb{P}(S_n < k) = 0.95$ es equivalente estandarizando a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n-\mu_n}{\sigma_n} < \frac{k-\mu_n}{\sigma_n}\right) = 0.95$ esto es $\mathbb{P}\left(z < \frac{k-\mu_n}{\sigma_n}\right) = 0.95$ donde $z \sim N(0,1)$. Sea $b = \frac{k-\mu_n}{\sigma_n}$, luego tenemos que si $\mathbb{P}(z < b) = 0.95$ entonces $b = 1.64$, de donde $\frac{k-\mu_n}{\sigma_n} = 1.64$. Luego tenemos que $k = p_{S_n}(0.95) = 1.64\sigma_n + \mu_n$.

4.3. Valor Presente con duración y pagos aleatorios

Suponga una anualidad con m pagos vencidos y m capitalizaciones al año, invertida en un fondo a la tasa efectiva i_m. La duración es a N años, donde N es una variable aleatoria distribuída

Poisson con parámetro $\lambda > 0$. El valor de los pagos vencidos se asumen variables aleatorias $X(k) \sim i.i.dN(\mu, \sigma^2)$, independientes de N. El saldo de la cuenta al final del período k es $F(k)$ donde $F(k) = (1 + i_m)F(k-1) - X(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, mN$. Entonces el valor presente del saldo en el tiempo de cierre N cumple $v^N F(mN) = F(0) - S_N$, donde $S_N = \sum_{j=1}^{mN} v^{j/m} X(j)$.

Algunas Propiedades del Valor Presente

Para hallar el valor de la anualidad, $F(0)$, se asume como condición de cierre que $E(v^N F(mN)) = 0$. Tenemos que $\mathbb{E}(v^N F(mN)) = \mathbb{E}(F(0) - S_N) = 0$, y se tiene que $F(0) = \mathbb{E}(S_N)$. Aplicando $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S_N|N))$, utilizando la propiedad de la esperanza condicional $E(X) = E(E(X|Y))$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N|N) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}} X(j)|N\right) = \sum_{j=1}^{mN} \mathbb{E}\left(v^{\frac{j}{m}} X(j)|N\right) = \sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}} \mathbb{E}\left(X(j)\right) \\
&= \mu \sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}} = \mu \sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}} = \mu \left(\frac{1 - v^N}{v^{-\frac{1}{m}} - 1}\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S_N|N)) &= \mu \frac{1 - \mathbb{E}(v^N)}{v^{-\frac{1}{m}} - 1} \\
&= \frac{\mu}{v^{-\frac{1}{m}} - 1}(1 - \mathbb{E}(v^N))
\end{aligned}$$

Pero como $N \sim Poisson(\lambda)$ tenemos que por definición

$$\begin{aligned}
E(v^N) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j \lambda^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(v\lambda)^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{v\lambda} = e^{-\lambda(1-v)}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathbb{E}(S_N) = \frac{\mu(1 - e^{-\lambda(1-v)})}{v^{-\frac{1}{m}} - 1}.$$

La desigualdad siguiente es útil.

$$E(S_N) \leq \frac{\mu(1 - v^{\lfloor \lambda \rfloor})}{v^{-\frac{1}{m}} - 1}. \tag{4.3}$$

La desigualdad provee una cota superior para el costo de la anualidad. Para la demostración se hará uso de la desigualdad de Jensen.

- Sea $f(x)$ una función tal que tiene segundas derivadas en cada punto de (a,b). Entonces $f(x)$ es convexa en (a,b) si y solo si $f''(x) \geq 0$ para cada $x \in (a,b)$.
- **Desigualdad de Jensen:** Sea $f(x)$ convexa y con $E(f(x)) < \infty$ entonces se cumple que $f(E(x)) \leq E(f(x))$.

Ahora, dado $f(t) = v^t$ tenemos que $f''(t) = t(t-1)v^{t-2}$ que claramente es mayor o igual a cero para todo $t \geq 1$. Por el primer resultado se tiene que $f(t) = v^t$ es una función convexa en $(1,\infty)$ de donde, por el segundo resultado que es la desigualdad de Jensen, se tiene que $v^{E(N)} \leq E(v^N)$. Luego se siguen las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
-\mathbb{E}(v^N) &\leq -v^{\mathbb{E}(N)} \\
1-\mathbb{E}(v^N) &\leq 1-v^{\mathbb{E}(N)} \\
\frac{\mu}{v^{-\frac{1}{m}}-1}(1-\mathbb{E}(v^N)) &\leq \frac{\mu}{v^{-\frac{1}{m}}-1}(1-v^{\mathbb{E}(N)}) \\
\mu\frac{1-\mathbb{E}(v^N)}{v^{-\frac{1}{m}}-1} &\leq \mu\frac{1-v^{\mathbb{E}(N)}}{v^{-\frac{1}{m}}-1} \\
\mathbb{E}(\mu\sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}}) &\leq \mu\sum_{j=1}^{m\mathbb{E}(N)} v^{\frac{j}{m}} \\
\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}}\mathbb{E}(X(j))) &\leq \sum_{j=1}^{m\mathbb{E}(N)} v^{\frac{j}{m}}\mathbb{E}(X(j)) \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{mN} v^{\frac{j}{m}}X(j)|N)] &\leq \sum_{j=1}^{m\mathbb{E}(N)} v^{\frac{j}{m}}\mathbb{E}(X(j)) \\
\mathbb{E}(S_N) &\leq \sum_{j=1}^{m\mathbb{E}(N)} v^{\frac{j}{m}}\mathbb{E}(X(j))
\end{aligned}
$$

Simulación de la variable S_N

La distribución de la variable S_N no es posible determinarla de manera analítica. Una alternativa es simularla a partir de sus elementos. Como $S_N = \sum_{j=1}^{mN} v^{j/m}X(j)$ se requiere especificar los diferentes parámetros.

1. Los parámetros $X(j) \sim N(\mu,\sigma^2)$,

2. El parámetro λ,

3. La tasa efectiva anual i,

4. El número de períodos de pago en el año, m.

El siguiente es el código utilizado para realizar la simulación:

```
mu = 10
sigma = 2
lambda = 20
tasa.i = 0.07
m = 12   #periodos de pago
n = 1000    #numero de datos
SN = double(n)
 for (j in 1:n) {
    N[j] = rpois(1,lambda)
    x = ifelse(N[j]>0,rnorm(m*N[j],mu,sigma),0)
    v = 1 / (1 + tasa.i)
    j = seq(1,m*N[j])
    vjm = v^(j/m)
    SN[j] = ifelse(N[j]>0,sum(vjm*x),0)
}

p = sum(N==0)/1000

par(mfrow=c(1,1))
plot(density(SN),
ylim=c(0,0.002), xlim=c(0,3000),
col='red',lty=1,lwd=2,main="",
xlab="x")
points(0,p)
```

La siguiente gráfica muestra la densidad de la variable S_N utilizando los parámetros definidos anteriormente:

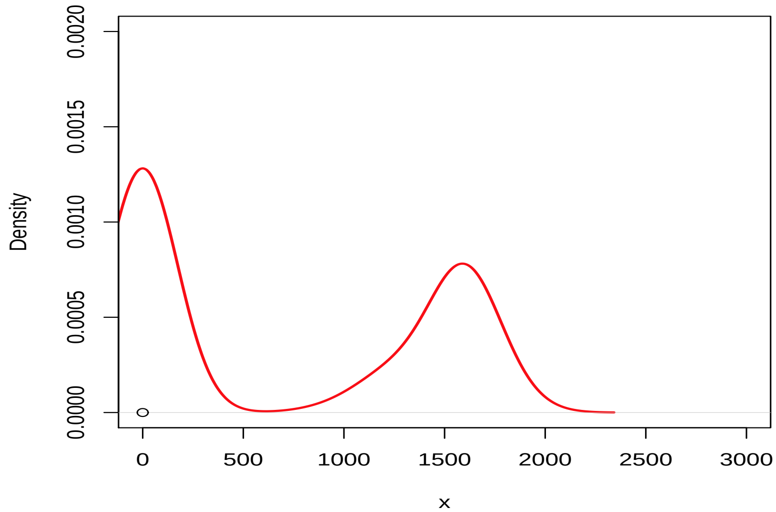


Figura 4.1: Densidad de la variable S_N utilizando la distribución Poisson

Capítulo 5

Anualidades con Tasas de Interés Estocásticas

En este capítulo se establece un modelo para una anualidad con duración aleatoria, pagos determinados no aleatorios y tasa de interés aleatoria, definida como una sucesión $(X_j, j \in \mathbb{N})$ de variables aleatorias.

5.1. Definición de Anualidad de Vida

Una anualidad de vida consiste en una serie de pagos periódicos (normalmente mensuales) que realiza un emisor a una persona desde el momento de su jubilación hasta el día en que fallezca. Estas anualidades se utilizan principalmente para ayudar a los pensionados en la administración de su dinero y así proporcionar una fuente fiable de ingresos. Cuando el pensionado fallece, el dinero que aún esta a su nombre queda a manos de el emisor cuando se trata de una renta vitalicia o pasa a manos de los beneficiarios cuando se trata de un retiro programado. [1]

5.2. Definición del Modelo para las Tasas de Rendimientos

El modelo que se utiliza para las tasas de rendimientos en este trabajo es un modelo compuesto por una distribución Normal Inversa Gaussiana y por un proceso autorregresivo casi integrado. Las siguientes son las definiciones de cada uno, las cuales son necesarias para llegar a la definición del modelo propuesto.

[1] Una de las principales diferencias entre Renta vitalicia y Retiro programado es que la primera es administrada generalmente por una aseguradora y cuando la persona fallece el dinero pasa a ser propiedad de la aseguradora, es decir no es heredable, mientras que el Retiro programado es administrado por un fondo de pensiones y cuando la persona fallece el saldo que queda a favor pasa a ser de los beneficiarios, es decir, este dinero es heredable.

5.2.1. Distribuciones NIG

Definición 5.2.1. *Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución Normal Inversa Gaussiana si su función de densidad de probabilidad está dada por*

$$f(x) = \frac{\alpha\delta K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} e^{\delta\gamma+\beta(x-\mu)}, \; -\infty < x < \infty, \tag{5.1}$$

donde los parámetros son: $\alpha, \delta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 \leq |\beta| < \alpha$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ y $K_\kappa(.), \kappa \geq 0$ es la función de Bessel modificada de tercera clase con índice κ. Se escribe $X \sim NIG(\mu, \alpha, \beta, \delta)$. [2]

Se tiene en este caso que $\mathbb{E}(X) = \mu + \delta\beta/\gamma$, $Var(X) = \delta\alpha^2/\gamma^3$, asimetría $\gamma_1 = 3\beta/(\alpha\sqrt{\delta\gamma})$, curtosis $\gamma_2 = 3(1 + 4\beta^2/\alpha^2)/(\delta\gamma)$. La NIG se clasifica como una distribución de cola semi-pesada, con colas menos pesadas que las de las distribuciones estables no gaussianas y más pesadas que las de la normal. Si α tiende a cero la NIG converge a una distribución Cauchy con parámetro de localización μ y escala δ. Si α y δ tienden a $+\infty$, tales que $\delta/\alpha = \sigma^2$, entonces la NIG converge a una distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$. El comportamiento asintótico de las colas de la NIG se expresa mediante la relación siguiente.

$$f(x) \sim |x|^{-3/2} e^{(-\alpha|x|+\beta x)}, \; |x| \to \infty. \tag{5.2}$$

Una variable X_e con distribución $NIG(0, \alpha, \beta, 1)$ se denomina NIG estándar, y se cumple que para $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $X = \mu + \delta X_e \sim NIG(\mu, \alpha, \beta, \delta)$. La función generadora de momentos de X está dada por

$$M_X(t) = e^{\mu t + \delta(\gamma - \sqrt{\alpha^2 - (\beta+t)^2})}. \tag{5.3}$$

5.2.2. Proceso Autorregresivo casi-integrado

Definición 5.2.2. *Un proceso AR(p) de media cero, estacionario en covarianza, se dice casi-integrado si el valor de p es alto y las raíces del polinomio autoregresivo $\varphi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j z^j$ están muy cercanas al círculo unidad.*

5.2.3. Definición del Modelo para los Rendimientos

Con las definiciones de la sección anterior, el modelo escogido para X_k se define como sigue.

Definición 5.2.3. *El modelo para $X_k, k = 1, 2, \ldots$, se define mediante el sistema de espacio de estados siguiente.*

$$\begin{aligned} U_k &= \varphi_0 + \varphi_1 U_{k-1} + \ldots + \varphi_p U_{k-p} + \epsilon_k, \\ X_k &= U_k + \eta_k, \end{aligned} \tag{5.4}$$

[2] β debe estar entre $-\alpha$ y α (recordar que $\alpha > 0$), ademas si $\beta < 0$ hay asimetría y si $\beta > 0$ hay simetría

con U_k un proceso AR(p), $p > 1$, estacionario en covarianza, gaussiano, ergódico, casi-estacionario, $\epsilon_k \sim iid\, N(0, \sigma^2)$ es una sucesión de variables normales y $\eta_k \sim iid\, NIG(\mu, \alpha, \beta, \delta)$. Los errores ϵ_k y η_k se asumen independientes.

Los parámetros se asumen en $\underline{\theta} = (\mu, \alpha, \delta, \sigma)' \in G \subseteq \mathbb{R} \times (0, \infty)^3$, de tal forma que se garantice que $\mathbb{P}(X_k \in (-1, 1), \forall k \geq 1) = 1$ y $\mathbb{E}(\eta_k) = 0$, o sea $\mu = \delta\beta/\gamma$. Las variables iniciales $U_0, U_{-1}, \ldots, U_{1-p}$ se asumen independientes distribuídas de acuerdo a la distribución estacionaria de U_k.

Adicionalmente, colocando $\mathbb{E}(U_k) = \mu_u$, entonces $\varphi_0 = \mu_u(1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j)$. Nótese que la condición de casi-integrado para U_k implica que $1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \approx 0$.

5.3. La Variable Valor Presente

Definición 5.3.1. *El valor presente S_{N_d} de las mesadas pensionales $r(k)$, pagadas a una vida (x) durante el tiempo que sobreviva, capitalizadas con base en las tasas $(X_j, j \in \mathbb{N})$, dadas por el modelo (5.4), se define como la suma aleatoria de variables aleatorias correlacionadas $S > 0$ dada por*

$$S_{N_d} = \sum_{k=1}^{N_d} r(k) \prod_{j=1}^{k} (1 + X_j)^{-1} \tag{5.5}$$

donde N_d está definida en (1.4). La sucesión $r(k)$ se define de la manera siguiente.

$$r(k) = P_k (1 + i_\Delta)^{\lfloor k/360 \rfloor} I(k \equiv 0(mod\, 30)) \tag{5.6}$$

donde $I(A)$ es una función indicadora, que vale 1 cuando la condición A es cierta, y 0 cuando no. La condición A es $k \equiv 0(mod\, 30)$, que es una manera de expresar que el número k es múltiplo de 30, y se lee "k es equivalente a cero, módulo 30", y significa que $k - 0$ es divisible por 30, es decir, k es un múltiplo de 30. La cantidad P_k es el valor de la mesada mensual durante año k, que se asume dada. E i_Δ es una tasa efectiva anual que representa el incremento anual de las mesadas mensuales, por costo de vida.

La distribución de la variable S no es posible encontrarla analíticamente debido a que pertenece a la familia de funciones que no son integrables por métodos elementales, de forma numérica:

$$\begin{aligned}
S_{N_d} &= \sum_{k=1}^{N_d} r(k) \prod_{j=1}^{k} (1 + X_j)^{-1} \\
&= \sum_{k=1}^{N_d} P_k (1 + i_\Delta)^{\lfloor k/360 \rfloor} \prod_{j=1}^{k} (1 + X_j)^{-1} \\
&= r(1)A^{(1)} + r(1)A^{(1)}B^{(2)} + r(1)A^{(1)}B^{(2)}C^{(3)} + \ldots
\end{aligned}$$

Ahora, tomando esperanza en ambos lados:

$$
\begin{aligned}
E(S_{N_d}) &= E(r(1)A^{(1)} + r(1)A^{(1)}B^{(2)} + r(1)A^{(1)}B^{(2)}C^{(3)} + ...) \\
&= E(P1E(1+i_\Delta)^{\lfloor 1/360 \rfloor}A^{(1)} + P2E(1+i_\Delta)^{\lfloor 2/360 \rfloor}A^{(1)}B^{(2)} \\
&+ P3E(1+i_\Delta)^{\lfloor 3/360 \rfloor}A^{(1)}B^{(2)}C^{(3)} + ...
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que $E(1+i_\Delta)^{\lfloor 1/360 \rfloor} = \int (1+i_\Delta)^{\lfloor 1/360 \rfloor} f i_\Delta d i_\Delta$ en donde el término $(1+i_\Delta)^{\lfloor 1/360 \rfloor}$ es una función que no es integrable por métodos elementales.

Por lo anterior, en esta tesis se recurre a la simulación Monte Carlo para encontrarla. Sin pretender sobre definir, se indicará la variable S como una distribución compuesta, con base en variables AR(p), NIG y GM. Escribiendo $\underline{\theta} = (\mu, \alpha, \beta, \delta)'$ los parámetros NIG, $\underline{\beta} = (\mu_u, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)'$ los parámetros AR(p), y $\underline{\psi} = (A, B, C)'$ los parámetros GM, la distribución de S se denota

$$S \sim C(NIG(\underline{\theta}), AR(\underline{\beta}), GM(\underline{\psi})). \tag{5.7}$$

5.3.1. Simulación de la distribución GM

El siguiente es el código de R utilizado para realizar la simulación de la distribución GM, Para esta simulación se utilizaron como datos principales los proporcionados por las tablas de mortalidad ISS 80-89 y las tablas de mortalidad 2010 con el fin de hallar los parámetros necesarios para la simulación de la variable S_N para cada género y tabla, y así poder realizar las comparaciones pertinentes.

```
rgm = function(n,s,g,c,x){
a = -log(s)
b = -log(g)*log(c)
u1 = runif(n)
t1 = log(1-log(c)*log(u1)/(b*c^x))/log(c)
t2 = rexp(n,a)
t = apply(cbind(t1,t2),1,min)
return(t)
}
```

5.3.2. Simulación de la variable Valor Presente S

La simulación de la variable S se hace con base en la simulación de una trayectoria de la sucesión X_j, y luego en n simulaciones de la variable N_d. La simulación de las variables $X_j = U_j + \eta_j$ se hace con base en una simulación de un proceso autorregresivo de orden p, AR(p), y una sucesión de variables iid NIG. Estos procedimientos están implementados en funciones de las librerías de R.

La siguiente es la gráfica de la distribución empírica del valor presente de los pagos de las rentas periodicas realizadas a una persona (curva negra) comparada con la distribución normal (curva roja): [3]

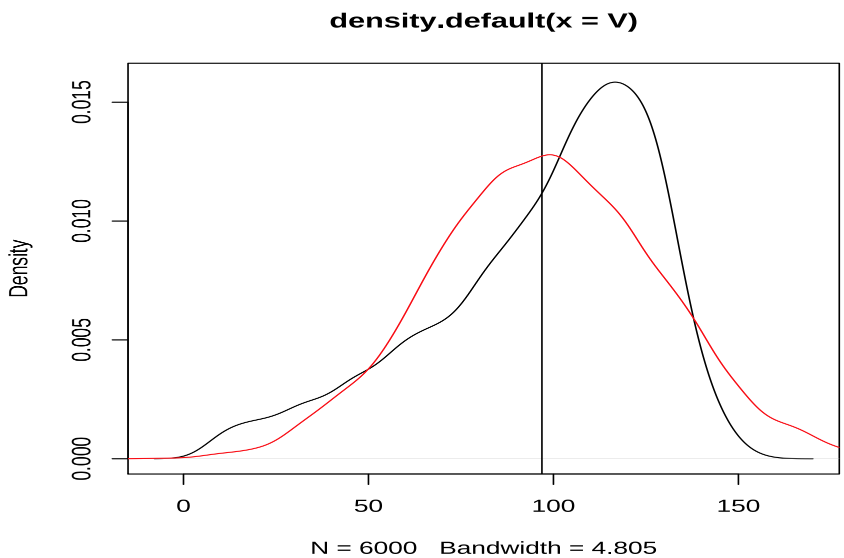


Figura 5.1: Distribución Empírica del VP de los pagos de las rentas periodicas.

la línea que atraviesa las dos curvas es la media de la distribución empírica la cual se puede tomar como un valor referente para el valor de la reserva, sin embargo en este trabajo se tomará el percentil 90 para indicar este valor. Esta elección se justifica porque el percentil 90 representa un recargo:

$$\bar{V}_0.9(1+\Theta)\bar{V}, 0<\Theta<1$$

donde Θ representa el recargo que cobra la empresa aseguradora con el fin de tener una cobertura por riesgo de longevidad y riesgo de tasas, y así poder asegurar un porcentaje de utilidad en la administración de la renta vitalicia.

De la gráfica 5.1 se puede ver también que la distribución tiene una asimetría negativa muy fuerte (muy pronunciada), esto sifnifica que concentra alta probabilidad en la cola derecha la cual vendría siendo la zona de riesgo: $\bar{V} > \bar{V}_0.9 = riesgo$

[3] con esta distribución es que se harán las comparaciones de los resultados obtenidos a través de las simulaciones.

5.3.3. Definiciones importantes: Riesgos de insolvencia, de extralongevidad y de tasas de interés

- **Definición del Riesgo de Insolvencia**

La definición del riesgo de insolvencia se hace con base en la distribución de la variable S. Se asume que el capital inicial para financiar la pensión corresponde a alguno de los cuantiles altos de esta distribución, por ejemplo, el percentil 90, indicado por $S_{0.9}$.

Definición 5.3.2. *Si $q \in (1/2, 1)$, y S_q denota el percentil de la variable S de 100q%, el riesgo de insolvencia se define como el evento $(S > S_q)$.*

Un supuesto es que este riesgo se debe a fluctuaciones extremas de las variables N_d, es decir de $T(x)$, y $X_j, j \in \mathbb{N}$. El riesgo proveniente de N_d se denominará riesgo de extralongevidad y el proveniente de $X_j, j \in \mathbb{N}$ se denominará riesgo de tasas de interés.

- **Riesgo de Extra Longevidad**

A partir de (3.4), ${}_tp_x = e^{-\int_0^t A+BC^{x+s}ds}$, se tiene que ${}_tp_x$ como función del parámetro C, es una función continua y decreciente estricta. Como la vida media cumple [4] $\mathbb{E}(T(x)) = \int_0^{110-x} {}_tp_x dt$ entonces esta cantidad como función de C también es una función decreciente. Por tanto, $C_1 < C_2$ implica $\mathbb{E}(T_1(x)) > \mathbb{E}(T_2(x))$. Se define el riesgo de extralongevidad como un incremento en la probabilidad de supervivencia de una vida de edad x, ${}_tp_x$.

Definición 5.3.3. *Se define el riesgo de extralongevidad para una vida de edad x tal que $T(x) \sim GM(A, B, C)$, como un incremento en la probabilidad ${}_tp_x$ debida a un decremento del valor del parámetro C.*

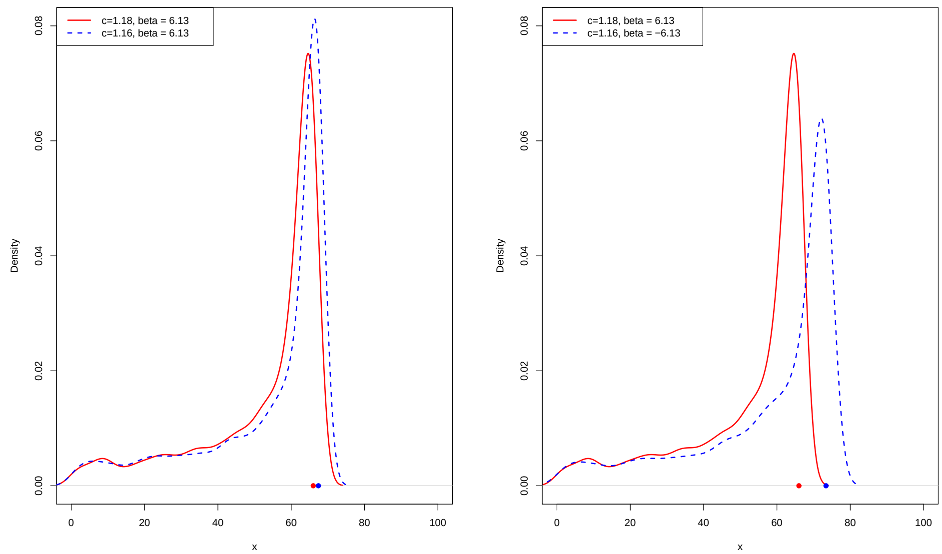
Sin embargo, el efecto del riesgo de longevidad en la distribución del valor presente (5.5) es más difícil de determinar. Buscamos comprobar que este incremento aumenta el valor de la probabilidad $\mathbb{P}(S > S_q)$.

Resultados empíricos con los cuales se demuestra la definición anterior

1. Suponga que $S_i \sim C(NIG(\underline{\theta}), AR(\underline{\beta}), GM(\underline{\psi}_i))$, para $i = 1, 2$, tal que $A_1 = A_2, B_1 = B_2$ y $C_1 < C_2$. Entonces se cumple que $S_{1,q} > S_{2,q}$.
2. Suponga que $S_{i,j} \sim C(NIG(\underline{\theta}_i), AR(\underline{\beta}), GM(\underline{\psi}_j))$, para $i, j = 1, 2$, tal que $C_1 < C_2$ y $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$. Entonces se cumple que $S_{i=1,j=2,q} > S_{i=2,j=1,q}$.

Se proporciona evidencia de la validez de la proposición anterior a partir de simulaciones debido a que la distribución de S no tiene una forma analítica tratable (para la simulación se realizaron 6000 réplicas):

[4] El límite superior es específico para el caso colombiano.



(a) Densidades Beta positiva variando parámetro C (b) Densidades Beta positiva y negativa variando parámetro C

Figura 5.2: Tasas y Densidades de Valores Presentes, mediante simulación.

Con estas gráficas se demuestra que una disminución en el parámetro C (efecto riesgo de extralongevidad) incrementa el valor de la probabilidad, y más aun cuando la disminución de este parámetro se combina con un $\beta < 0$ (gráfica (b)).

- **Riesgo Tasa de Interés**

El riesgo de tasa de interés se define con base en los parámetros de la sucesión $X_j, j \in \mathbb{N}$, es decir, los parámetros $\underline{\theta}$ y $\underline{\beta}_i$.

Definición 5.3.4. *Suponga que la media de la sucesión X_j es $\mathbb{E}(X_j) = \mu_X > 0$. Como la frecuencia es diaria, esta media corresponde a una tasa de interés efectiva diaria. Defina la tasa $i_a = [(1 + i_\Delta)(1 + 0.04)]^{1/360} - 1$ como la tasa que la Aseguradora ofrece inicialmente en sus contratos de Renta Vitalicia, la cual equivale a definir una tasa de incremento por IPC, efectiva anual i_Δ. Se define el riesgo de tasa de interés como el evento $\mu_X < i_a$. En este caso se requiere mucho más capital para garantizar los pagos de las mesadas actualizados por IPC.*

Resultados empíricos

Suponga que $S_i \sim C(NIG(\underline{\theta}), AR(\underline{\beta}_i), GM(\underline{\psi}))$, para $i = 1, 2$, tal que $\mu_{X,1} > i_a$ y $\mu_{X,2} = i_a$. Entonces se cumple que $S_{1,q} < S_{2,q}$.[5].

[5]Es decir, cuando las tasas obtenidas son mayores a las que se ofrecieron inicialmente en el contrato la cola de la

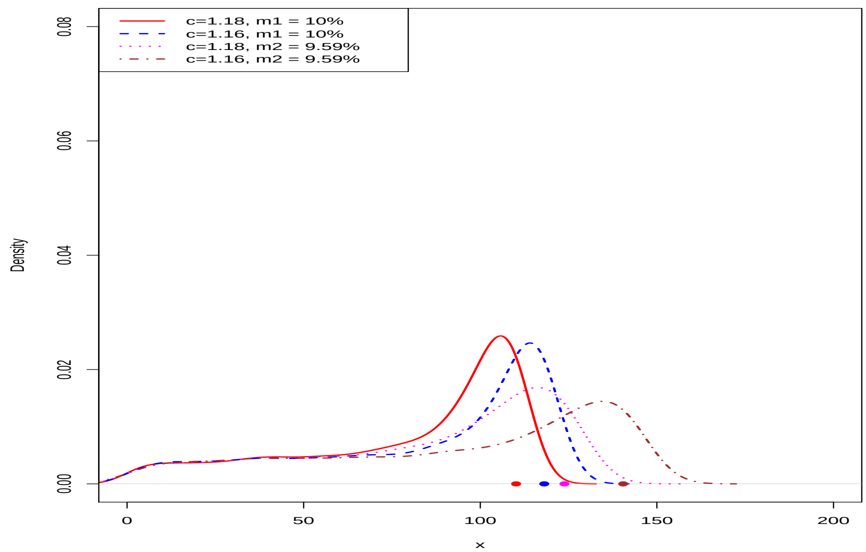


Figura 5.3: Densidades de Valores Presentes

En esta gráfica se observan cuatro combinaciones:

- Distribución roja: corresponde a la combinación de un valor del parámetro C alto (1.18) con una tasa superior a la ofrecida al inicio del contrato (10 %) *(No existe presencia de ningún riesgo)*
- Distribución azul: corresponde a la combinación de un valor del parámetro C bajo (1.16) con una tasa superior a la ofrecida al inicio del contrato (10 %)*(Presencia riesgo de extralongevidad)*
- Distribución rosada: corresponde a la combinación de un valor del parámetro C alto (1.18) con una tasa igual a la ofrecida al inicio del contrato (9.59 %) *(Se asume como si se tuviera riesgo de tasas de interés aunque se cumpla con la tasa ofrecida en el inicio del contrato)*
- Distribución café: corresponde a la combinación de un valor del parámetro C bajo (1.16) con una tasa igual a la ofrecida al inicio del contrato (9.59 %) *(Presencia de ambos riesgos: extralongevidad y tasas de interés)*

En la gráfica se puede observar que, para la compañía aseguradora:

- El menor riesgo se obtiene cuando no se presenta ningún tipo de riesgo (es decir, cuando las condiciones de mercado generan tasas superiores a las esperadas al inicio del contrato y la persona no sobrevivió más de lo esperado).

distribución se vuelve menos pesada disminuyendo así el riesgo de insolvencia por tasas de interés. Se debe tener en cuenta también que el número de réplicas utilizado en la simulación fue de 6000

- El mayor riesgo se obtiene cuando se presentan los dos tipos de riesgo (riesgo de tasas por disminución de las mismas y riesgo de extralongevidad por una disminución en el parámetro C)
- En cuanto a las combinaciones en las que solo hay presencia de uno de los riesgos se puede observar que es más crítico cuando se da riesgo de tasas a cuando se da solamente riesgo de extralongevidad.

Capítulo 6

Aplicaciones con base en las Tablas de Vida 80-89 y 2010

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos a través de las simulaciones haciendo uso de las tablas de mortalidad 80-89 y 2010, y de los modelos NIG, AR y GM (con sus respectivos parámetros de acuerdo al género y a la tabla de vida que se haga referencia).

6.1. Estimación de los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham

Para poder hallar las densidades de los valores presentes se requiere incialmente tener definidos los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham, para esto se realizó una estimación utilizando mínimos cuadrados no lineales en donde la regresión es de la tasa central de mortalidad $[my]$ contra x[1].

Los siguientes son los valores estimados de los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham:

PARÁMETROS	HOMBRES		MUJERES	
	Tablas 80-89	Tablas 2010	Tablas 80-89	Tablas 2010
A	0.000001	0.001440156	0.000001	0.000001
B	0.0001139145	0.00001787651	0.0001038962	0.00000554036
C	1.0853965479	1.1034888	1.0856407647	1.1155694
s	0.999999	0.9985609	0.999999	0.999999
g	0.9986108	0.9998185	0.9987364	0.9999493

Cuadro 6.1: Valores estimados Parámetros GM

[1] La estimación se realizó en el programa estadístico R. Para ver el código remítase al capítulo de Anexos, sección 8.4

6.2. Análisis de solvencia utilizando parámetros fijos

El Análisis de Solvencia de esta sección se realiza combinando riesgo de extralongevidad con riesgo de tasas de interés, pero dejando fijos los parámetros ***s*** y ***g*** de la distribución GM.

En esta parte se presentan cuatro casos de análisis, tanto para hombres como para mujeres, los cuales surgen al modificar el valor estimado del parámetro C de la distribución GM (de la tabla ISS2010) y el valor de la tasa ofrecida por la compañía al inicio del contrato (denotada en adelante como mu.ar). La modificación del parámetro C, específicamente la disminución de este parámetro, produce riesgo de extralongevidad, esto es:

$$C2 < C1 \Rightarrow e^o_{x_{i,2}} > e^o_{x_{i,1}}$$
$$C2 < C1 \Rightarrow_t p_x^{(2)} >_t p_x^{(1)}$$

donde $_tp_x$ es la probalidad de supervivencia distribuida GM.

Y la modificación de la tasa ofrecida, específicamente, obtener una tasa más baja que la tasa de mercado significa que la compañía debe responder a las personas jubiladas por los rendimientos dejados de percibir con el fin de que esta disminución no afecte significativamente el valor de la reserva, esto es a lo que se llama riesgo de tasas de interés.

En adelante se utilizarán los siguientes cuatro casos de estudio (correspondientes a las posibles combinaciones del parámetro C y el valor de las tasas):

- Distribución roja: C1 - $mu.ar1$: Caso en el que, bajo las condiciones de las simulaciones, no se presenta ningún tipo de riesgo ya que la tasa es superior a la establecida al inicio del contrato y el parámetro C1 es el mayor de los dos establecidos para la simulación.
- Distribución azul: C2 - $mu.ar1$: Caso en el que sólo esta presente el riesgo de extralongevidad debido a que la tasa es superior a la establecida al inicio del contrato pero el parámetro C2 es el menor de los dos establecidos para la simulación.
- Distribución rosada: C1 - $mu.ar2$:Caso en el que sólo esta presente el riesgo de tasas de interés debido a que la tasa es menor a la establecida al inicio del contrato pero el parámetro C1 es el mayor de los dos establecidos para la simulación.
- Distribución café: C2 - $mu.ar2$: Este caso indica la presencia de ambos riesgos, la tasa utilizada es menor a la establecida al inicio del contrato y el parámetro C2 es el menor de los dos establecidos para la simulación.

En forma de tabla:

	mu.ar1	mu.ar2
C1	Sin riesgos presentes	Presente riesgo de tasas de interés
C2	Presente riesgo de extralongevidad	Ambos riesgos presentes

Cuadro 6.2: Casos de análisis

En donde $C1 > C2$ y $mu.ar1 > mu.ar2$. El valor de $C1$ corresponde al valor estimado del parámetro C de la distribución GM tanto para hombres como para mujeres (ver tabla 6.1 para los datos de la tabla ISS2010), el valor $mu.ar1 = 11\,\%$, $mu.ar2 = 8\,\%$, el valor de la tasa de mercado $i_a = 9\,\%$. Los demás parámetros de la distribución GM se dejan fijos. [2]

Análisis de los cuatro casos - HOMBRES

Cada distribución de la siguiente gráfica representa uno de los casos de análisis y los puntos ubicados en el eje x indican el percentil 90 de cada distribución:

- Distribución roja: C1 - $mu.ar1$.
- Distribución azul: C2 - $mu.ar1$.
- Distribución rosada: C1 - $mu.ar2$.
- Distribución café: C2 - $mu.ar2$.

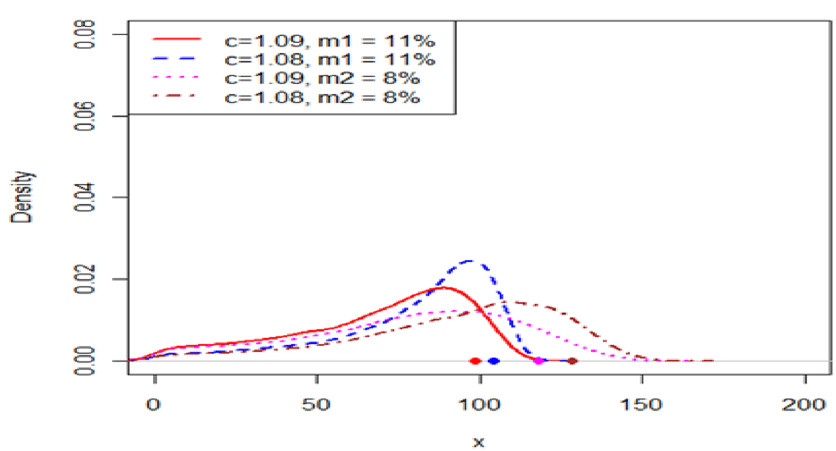


Figura 6.1: Distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas sin fijar parametros de la GM-Hombres.

[2]Para realizar la simulación se tuvieron en cuenta 6000 réplicas tanto para el caso de hombres como para el de mujeres

El resultado numérico de esta iteración es el siguiente:

	50 %	80 %	90 %	95 %
C1 - $mu.ar1$	75.41919	92.91382	98.86362	102.78935
C2 - $mu.ar1$	87.55704	100.40931	104.42009	107.23253
C1 - $mu.ar2$	82.60888	107.56426	117.88635	125.26464
C2 - $mu.ar2$	99.20482	120.77784	128.45226	134.40947

Cuadro 6.3: Valor de los cuantiles para cada caso hallados con los parámetros de la GM sin fijar - Hombres

Esto significa que cuando se utilizan los parámetros estimados de la GM para la tabla 80-89 sin presencia de riesgo de tasas el valor de la reserva es de 98.8 millones, cuando se utilizan los parámetros estimados de la tabla 2010 sin presencia de riesgo de tasas el valor de la reserva es de 104.4 millones, cuando se utilizan los parámetros estimados de la tabla 80-89 con riesgo de tasas el valor de la reserva es de 117.8 millones y cuando se utilizan los parámetros estimados de la tabla 2010 con riesgo de tasas el valor de la reserva asciende a los 128.4 millones.

En términos generales, lo que indica la gráfica es que el valor de la reserva debe incrementar dependiendo del riesgo que se presente: la reserva debe ser de mayor valor si se presenta riesgo de tasas en vez de riesgo de longevidad, y obviamente el caso más extremo es el incremento que debe hacerse en el valor de la reserva cuando se está en presencia de ambos riesgos.

La siguiente es la distribución de las tasas cuando se da una disminución en las mismas:

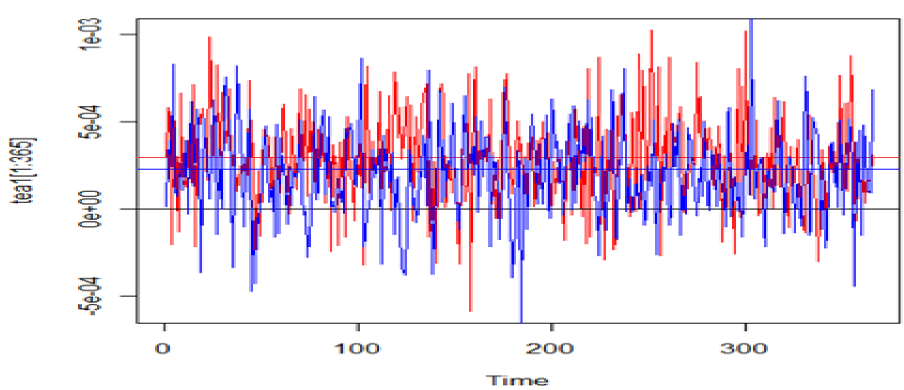


Figura 6.2: Tasas de la Distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas sin fijar parametros de la GM- Hombres

Para poder determinar cuál de las tasas está generando mayores rendimientos negativos no basta con mirar la anterior gráfica, aunque se podría asumir que la azul es la que presenta dicho comportamiento esto solo se corrobora al analizar (por ejemplo) algún valor numérico, el cual puede ser su media:

- Media de las Tasas representadas por el color rojo: $11.12\,\%$.
- Media de las Tasas representadas por el color azul: $8.4\,\%$.

En efecto, la tasa que está generando los mayores rendimientos negativos es la representada por el color azúl. Lo cual comprueba que sí se presentó un riesgo de tasas de interés en la serie analizada.

Análisis de los cuatro casos - MUJERES

Al igual que en el caso de los hombres, cada distribución de la siguiente gráfica representa uno de los casos de análisis y los puntos ubicados en el eje x indican el percentil 90 de cada distribución. Además los colores de las distribuciones representan los mismos casos que los analizados en el caso de los hombres.

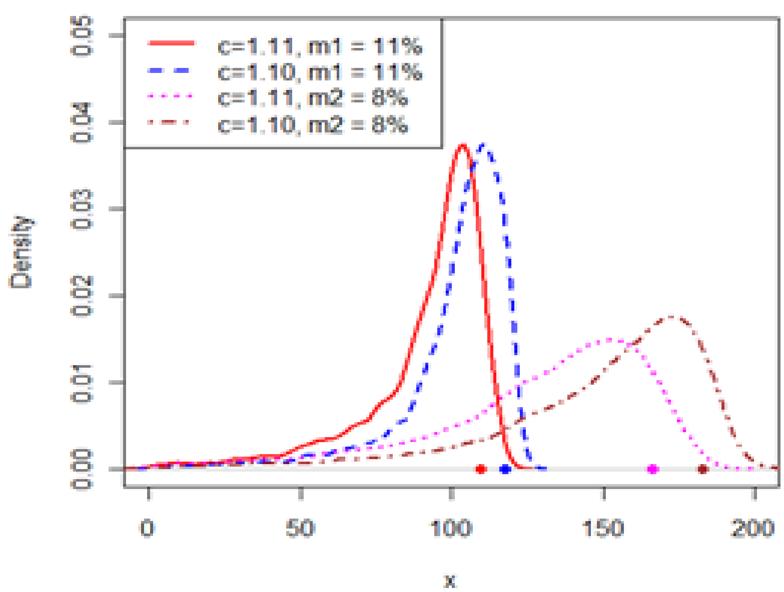


Figura 6.3: Distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas - Mujeres.

Para entender un poco mejor el efecto que tienen los riesgos en el valor de la reserva se muestra a continuación el resultado numérico de la iteración con la cual se obtuvo la gráfica[3]:

[3] Es de recordar que estos resultados son efecto de simulaciones por lo cual no son datos exactos y deben tomarse como

El resultado numérico en este caso es el siguiente:

	50 %	80 %	90 %	95 %
C1 - $mu.ar1$	98.47299	106.51980	109.55523	111.90218
C2 - $mu.ar1$	106.4349	114.6366	117.6770	119.5358
C1 - $mu.ar2$	138.6369	159.0326	166.2683	171.3874
C2 - $mu.ar2$	158.8228	176.8562	182.8475	186.6814

Cuadro 6.4: Valor de los cuantiles para cada caso - MUJERES

Esto significa que, cuando no hay ningún tipo de riesgo presente el valor de la reserva que debe tener una mujer de 57 años para obtener una pensión mensual de 530.000 es de 109.5 millones. Cuando se presenta riesgo de longevidad el valor de la reserva se incrementa a 117.6 millones (incremento de 8.2 millones que representan un 7.4 % adicional) . Cuando se presenta riesgo de tasas de interés el valor de la reserva se incrementa a $166, 27$ millones (un incremento de 48.6 millones, 41 % adicional frente a la presencia de riesgo de extralongevidad solamente, y un incremento de 56.72 millones, 51.7 % adicional a cuando no se presenta ningún riesgo). Y cuando se presentan ambos riesgos, el de extralongevidad y el de tasas de interés, la reserva se incrementa a 182.84 millones (incremento de 16.57 millones, 9.96 %, frente a la presencia de riesgo de tasas de interes solamente; de 65.17 millones, 55.4 %,frente a la presencia de riesgo de extralongevidad solamente y de 73.29 millones, 66.9 %, frente al caso en el que no se presenta ninguno de los dos tipos de riesgo)

Con esto se corrobora la conclusión generada del análisis de las distribuciones para el genero masculino: el valor de la reserva es más alto cuando hay presencia de riesgo de tasas en vez de riesgo de longevidad, sin embargo el valor más alto de la reserva se da cuando están presentes ambos riesgos.

Otro resultado interesante que se puede observar comparando ambos géneros, es que el valor de las reservas para los cuatro casos estudiados es mayor para las mujeres que para los hombres, en este ejemplo y tomando el caso más extremo (presencia de ambos riesgos) se puede ver que la reserva para la mujer es mayor en \$20.075 millones, es decir una mujer necesitaria un $15.9\,\%$ más de capital que el hombre para cubrir los dos tipos de riesgo.

La siguiente es la distribución de las tasas cuando se da una disminución en las mismas:

ejemplo mas no como un hecho cierto

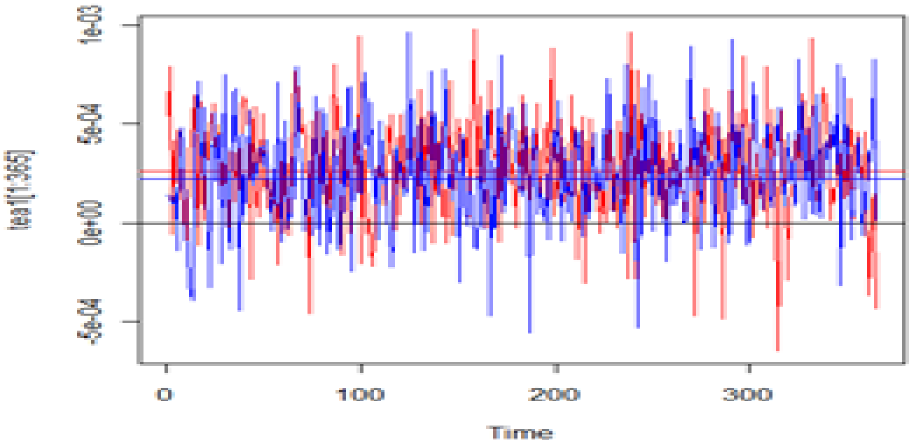


Figura 6.4: Tasas de la distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas - Mujeres.

Los siguientes son los valores de las medias de cada una de las tasas:

- Media de las Tasas representadas por el color rojo: $9.8\,\%$.
- Media de las Tasas representadas por el color azul: $8.4\,\%$.

Con lo cual se puede concluir que la tasa que está generando los mayores rendimientos negativos es la representada por el color azúl. Lo cual comprueba que sí se presentó un riesgo de tasas de interés en la serie analizada, y su efecto se puede ver reflejado en que las gráficas de las distribuciones construidas con esta tasa menor son las que mayor riesgo representan para la compañía.

6.3. Análisis de solvencia sin fijar ninguno de los parámetros

En esta subsección se muestran las distribuciones de supervivencia (construidas con las tablas de mortalidad) con las cuales se puede observar más claramente el incremento en la probabilidad de sobrevivir t años más, tanto en hombres como mujeres, a partir de una edad x (57 años mujer y 62 años hombre). También se realizan los mismos análisis de la subsección anterior con la diferencia de que en este caso los parámetros de la GM corresponden a los datos estimados para ambos géneros en ambas tablas de mortalidad de rentistas (80-89 y 2010), es decir, acá no se deja ningún parámetro fijo.

Esto se realizó para mostrar que, aunque el parámetro C es quien representa la longevidad, los demás parámetros también influyen (en una menor proporción) para que se presente este tipo de riesgo:

Análisis de los cuatro casos - HOMBRES

En este caso las distribuciones representan los siguientes casos

- Distribución roja: Parámetros GM de la tabla 80-89 con $mu.ar1$.
- Distribución azul: Parámetros GM de la tabla 2010 con $mu.ar1$.
- Distribución rosada: Parámetros GM de la tabla 80-89 con $mu.ar2$.
- Distribución café: Parámetros GM de la tabla 2010 con $mu.ar2$.

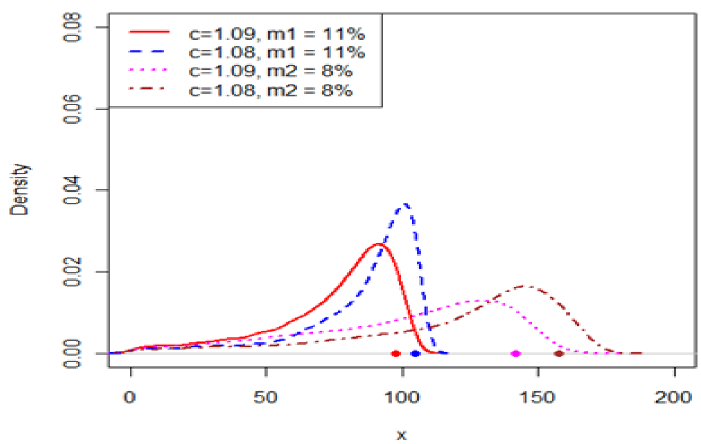


Figura 6.5: Distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas - Hombres.

De esta gráfica se puede ratificar una conclusión presentada en la subsección anterior y es que el riesgo de tasas influye más en el incremento de la reserva que el riesgo de longevidad, además que el valor más alto de la reserva se presenta cuando se dan los dos riesgos, el de tasas de interés y el de longevidad (distribución café).

	50 %	80 %	90 %	95 %
C1 - $mu.ar1$	82.00928	93.78977	97.66453	100.05126
C2 - $mu.ar1$	93.0840	101.8511	104.5290	105.9829
C1 - $mu.ar2$	109.1601	133.7229	141.6206	146.5905
C2 - $mu.ar2$	132.2614	150.7312	157.7728	162.0217

Cuadro 6.5: Valor de los cuantiles para cada caso - Hombres

Esto significa que, cuando no hay ningún tipo de riesgo presente el valor de la reserva que debe tener un hombre de 62 años para obtener una pensión mensual de 530.000 es de 97.66 millones. Cuando se presenta riesgo de longevidad el valor de la reserva se incrementa a 104.53 millones (incremento de 6.87 millones que representan un 7.03 % adicional) . Cuando se presenta riesgo de tasas de interés el valor de la reserva se incrementa a 141.62 millones (un incremento de 37.09 millones, 35 % adicional frente a la presencia de riesgo de extralongevidad solamente, y un incremento de 43.96 millones, 45 % adicional a cuando no se presenta ningún riesgo). Y cuando se presentan ambos riesgos, el de extralongevidad y el de tasas de interés, la reserva se incrementa a 157.77 millones (incremento de 16.15 millones, 11.4 %, frente a la presencia de riesgo de tasas de interes solamente; de 53.24 millones, 50.9 %,frente a la presencia de riesgo de extralongevidad solamente y de 60.11 millones, 61.55 %, frente al caso en el que no se presenta ninguno de los dos tipos de riesgo)

Si se comparan estos resultados con los presentados anteriormente para hombres cuando se dejaban fijos los parámetros s y g, se puede ver que la reserva es mucho mayor acá que allá, es decir, se comprueba que todos los parámetros aportan a que se incremente el riesgo de longevidad (aunque sea en una menor proporción).

La siguiente es la distribución de las tasas cuando se da una disminución en las mismas:

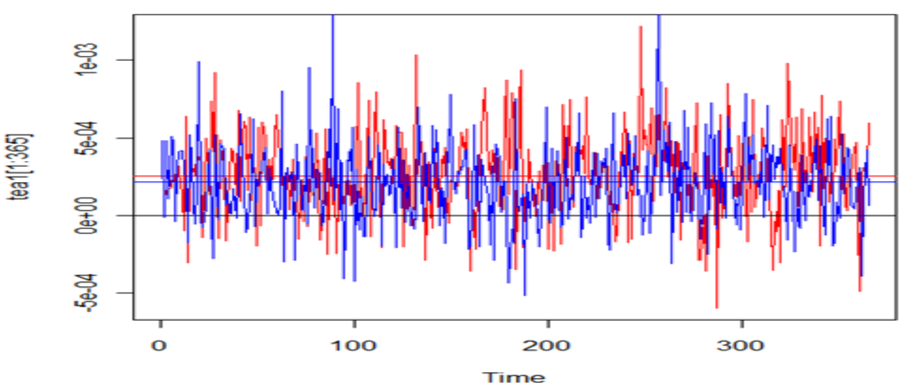


Figura 6.6: Tasas de la distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas - Hombres.

Donde la media de la serie roja es 9.6 % y la media de la serie azul es 8.04 %.

Análisis de los cuatro casos - MUJERES

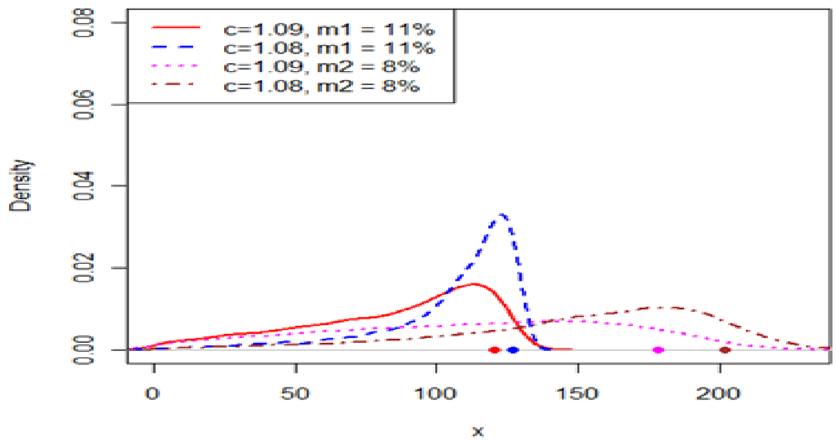


Figura 6.7: Distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas sin fijar parametros de la GM-Mujeres.

En esta gráfica las distribuciones representan los mismos casos que para el analisis de hombres y el resultado numérico en este caso es el siguiente:

	50 %	80 %	90 %	95 %
C1 - $mu.ar1$	93.56506	114.63038	120.56343	124.28164
C2 - $mu.ar1$	114.0780	124.1917	127.1250	129.0092
C1 - $mu.ar2$	117.6836	161.8929	178.4396	190.6327
C2 - $mu.ar2$	160.4623	190.3141	201.7071	210.9381

Cuadro 6.6: Valor de los cuantiles para cada caso hallados con los parámetros de la GM sin fijar - Mujeres

En cuanto a las tablas, también se puede apreciar que la serie azul proporciona mas rendimientos negativos que la roja:

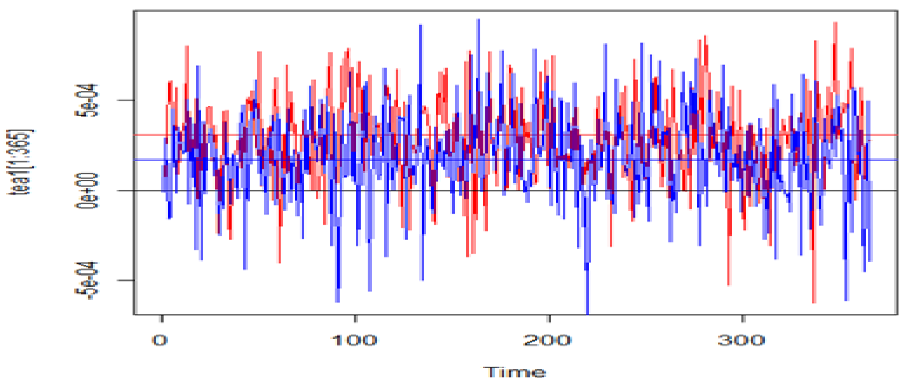


Figura 6.8: Tasas de la distribución del VP de los pagos de las rentas periodicas sin fijar parametros de la GM- Mujeres.

Donde la media de la serie roja es 11.7 % y la media de la serie azul es 6.4 %.

De ambas gráficas (distribuciones y tasas de interés) se puede ver que los rendimientos negativos influyen significativamente en el valor inicial de la reserva (incrementando su valor)

Capítulo 7

Conclusiones

Para simular la variable $S_{N_d} = \sum_{k=1}^{N_d} r(k) \prod_{j=1}^{k}(1 + X_j)^{-1}$ se debió hacer una estimación de los parámetros de la distribución Gombertz-Mahekam [1] (esto se realizó utilizando mínimos cuadrados no lineales). El resultado no fue $100\,\%$ satisfactorio ya que el parámetro *A* para mujeres en ambas tablas de mortalidad y hombres en la tabla de mortalidad 80-89 arrojó el mismo valor, el cual corresponde a la cota inferior asignada en la programación, lo cual a su vez implicó que el valor del parámetro *s* fuera el mismo para estos casos. A pesar de esto se utilizaron estos valores estimados para continuar con el trabajo de investigación ya que para el parámetro *C* los valores obtenidos cumplieron con las condiciones esperadas (que fuera de menor valor en las tablas 80-89 que en 2010 y que fuera menor para hombres que para mujeres).

Cuando se comenzó con este trabajo se comprobó de forma matemática que una disminución del parámetro *C* de la distribución GM incrementaba el valor de la reserva (esto mientras se mantuvieran los demás parámetros fijos). Esta comprobación se hizo utilizando simulación de la distribución de la variable S_{N_d} la cual mostró como resultado que bajo esas condiciones la cola se hacía más pesada, esto implicaba un incremento en el valor inicial de la reserva debido al incremento de la longevidad. En este caso, un análisis adicional fue mirar el efecto en la reserva cuando se producía un riesgo de tasas de interés, el resultado fue que cuando la tasa ofrecida por la compañía es menor que la tasa de mercado se produce un desplazamiento a la derecha de la distribución, es decir, se presenta riesgo de agotamiento de capital producido por tasas de interés bajas, lo que implica, como se explicó anteriormente, un incremento en el valor inicial de la reserva. Al combinar ambos riesgos (riesgo de longevidad y riesgo de tasas de interés) los resultados fueron que el valor de la reserva depende del riesgo que se presente: el valor de la reserva es mayor cuando se presenta solo riesgo de tasas a cuando se presenta únicamente riesgo de extralongevidad, sin embargo el incremento más alto en este valor se da cuando se presentan los dos riesgos (ya que debe cubrir dos hechos: primero, que la presona

[1] recordar: la fuerza de mortalidad GM está dada por $\mu_x = A + BC^x$, donde A: fuerza de mortalidad por accidente, y BC^x: fuerza de mortalidad por envejecimiento. A partir de esta fuerza de mortalidad de halla la función de supervivencia GM: ${}_tp_x = s^t g^{C^x(C^t-1)}$ con $s = e^{-A}$ y $g = e^{\frac{-B}{ln(C)}}$

viva más de lo esperado y segundo, que las rentabilidades sean menores a las esperadas, en ambos casos el riesgo para la compañía es que es ésta la que debe responder por los recursos que hagan falta para cumplir con las condiciones pactadas en el contrato pensional). Otro resultado obtenido es que el efecto de la presencia de riesgos descrito anteriormente aplica de la misma forma para hombres y mujeres (es decir, el orden de las curvas de densidad fue el mismo), sin embargo el valor de la reserva para cubrir estos riesgos, en la mayoría de las iteraciones en que se realizaron las simulaciones, el valor de la reserva era mayor para las mujeres (dentro de los ejemplos presentados se pudo ver numéricamente que en presencia de ambos riesgos el valor de la reserva para una pensión mensual de 530.000 para un hombre era de 118 millones, mientras que para una mujer era de 182 millones), y en el caso en donde ningún riesgo se presentaba fue menor (en la mayoría de las iteraciones)el valor de la reserva para los hombres que para las mujeres.

Cuando se iba a iniciar la aplicación de esta metodología a las tablas de mortalidad de rentistas 80-89 y 2010, se vio que el parámetro C de la distribución GM de las tablas estimadas inicialmente muestra un efecto contrario al escenario utilizado en la comprobación matemática (en el cual para que se presentara riesgo de extralongevidad se disminuyó el valor de C, mientras que en las tablas estimadas, a mayor longevidad más grande era el parámetro C). Esto se justifica con que para la comprobación matemática no sólo se disminuyó el valor de C sino que también se mantuvieron fijos los demás parámetros, mientras que en las tablas estimadas todos los parámetros se modificaban. Debido a esto se tomó la decisión de realizar la aplicación a las tablas de mortalidad utilizando todos los parámetros estimados de la distribución para ambas tablas de ambos géneros. Los resultados obtenidos fueron similares a los que se obtuvieron en el ejercicio de comprobación matemática, en donde los mayores riesgos se dan en presencia de tasas menores a las ofrecidas por el mercado, acá el valor más alto de la reserva se da en el caso de combinación de parámetros estimados de la distribución GM para la tabla 2010 con tasas menores a las tasas de mercado (acá el efecto de extralongevidad lo proporcionan los parámetros estimados de la tabla 2010, los cuales incrementaron su valor respecto a los valores de la tabla 80-89). De este ejercicio es importante resaltar que acá el valor de la reserva también (en la mayoría de las iteraciones) fue mayor para las mujeres que para los hombres, sin embargo cuando se utilizan todos los parámetros de la distribución GM en sus valores originales (estimados) el valor de la reserva es mayor a cuando se modifica (disminuye) el valor del parámetro C únicamente y los demás se dejan fijos.

Un análisis adicional fue mirar la distribución de supervivencia para cada género (utilizando nuevamente los valores estimados de la distribución GM). El análisis se realizó bajo dos escenarios: primero, la probabilidad de que una persona a su edad de jubilación (57 años mujer y 62 años hombre) sobreviva hasta los 80 y segundo, que una persona (hombre o mujer) de 70 años sobreviva hasta los 80. En ambos casos el resultado fue el mismo: el cambio en las tablas de mortalidad incrementó para ambos géneros la probabilidad de supervivencia, aunque para las mujeres incrementó en mayor proporción (y se ve más claramente en un esceanrio como el segundo en donde las condiciones de edad para hombres y mujeres son las mismas).

Capítulo 8

Trabajos Futuros

Otros trabajos que se pueden derivar de esta tesis o que pueden tenerla como base investigativa son:

- Expandir el análisis de solvencia a los pensionados por invalidez, sin dejar a un lado las características que tiene el régimen para este tipo de pensión.
- Calcular el riesgo total para la Aseguradora, es decir, no tomar a una sola persona para el análisis sino a todas las personas que tienen contratada la renta vitalicia. Esto se fundamenta en la característica que tiene la renta vitalicia de no ser heredable, y por consiguiente debe haber un subsidio entre todos los pensionados contratantes de este tipo de pensión de tal forma que mitiguen un poco más el riesgo de cobertura para la aseguradora.
- Hacer el análisis más robusto incluyendo otro tipo de variables, como por ejemplo los tipos de trabajo que realizó en los últimos años antes de la pensión, condiciones de salud favorables o desfavorables, ciudad de residencia, entre otras.

Capítulo 9

Anexos

9.1. Definiciones Auxiliares

Se utiliza la notación siguiente para los coeficientes de asimetría y de curtosis, respectivamente, de una variable aleatoria X.

Definición 9.1.1.

$$\begin{aligned} \textit{Coeficiente de asimetría: } \gamma_1(X) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^3)/Var(X)^{3/2} \\ \textit{Coeficiente de curtosis: } \gamma_2(X) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^4)/Var(X)^2 - 3. \end{aligned}$$

Nótese que en R hay dos librerías para calcular curtosis y asimetría. La librería moments tiene la función kurtosis que calcula sin restar -3 en la fórmula anterior. En cambio, la librería timeDate tiene la función kurtosis que calcula por defecto restando -3, como aparece en la fórmula anterior. Puede calcular sin restar menos tres con la opción method="moment".

9.2. Tablas de Mortalidad Experiencia ISS 1980 - 1989

La siguiente es la Tabla de Mortalidad vigente hasta 2010, era la correspondiente al periodo 1980 - 1989 ([1])

```
# y = hombre
 y        ly         dy      qy        ey         x        lx         dx      qx        ex
 15       100000     30      0.0003000 62.8       15       100000     30      0.0003000 61.3
 16        99970     34      0.0003401 61.8       16        99970     35      0.0003501 60.3
 17        99936     39      0.0003902 60.8       17        99935     40      0.0004003 59.3
 18        99897     43      0.0004304 59.9       18        99895     45      0.0004505 58.3
 19        99854     46      0.0004607 58.9       19        99850     50      0.0005008 57.3
 20        99808     50      0.0005010 57.9       20        99800     54      0.0005411 56.4
 21        99758     54      0.0005413 56.9       21        99746     58      0.0005815 55.4
```

[1]Tomada del sitio web: actactuarios.com/imgnoticias/ModeloRentas.xls

22	99704	57	0.0005717	56.0	22	99688	62	0.0006219	54.4
23	99647	61	0.0006122	55.0	23	99626	67	0.0006725	53.5
24	99586	65	0.0006527	54.0	24	99559	71	0.0007131	52.5
25	99521	69	0.0006933	53.1	25	99488	74	0.0007438	51.5
26	99452	72	0.0007240	52.1	26	99414	79	0.0007947	50.6
27	99380	77	0.0007748	51.1	27	99335	82	0.0008255	49.6
28	99303	81	0.0008157	50.2	28	99253	87	0.0008765	48.7
29	99222	86	0.0008667	49.2	29	99166	89	0.0008975	47.7
30	99136	90	0.0009078	48.3	30	99077	93	0.0009387	46.7
31	99046	95	0.0009592	47.3	31	98984	98	0.0009901	45.8
32	98951	101	0.0010207	46.3	32	98886	103	0.0010416	44.8
33	98850	107	0.0010824	45.4	33	98783	110	0.0011136	43.9
34	98743	116	0.0011748	44.4	34	98673	116	0.0011756	42.9
35	98627	124	0.0012573	43.5	35	98557	125	0.0012683	42.0
36	98503	134	0.0013604	42.5	36	98432	135	0.0013715	41.0
37	98369	145	0.0014740	41.6	37	98297	147	0.0014955	40.1
38	98224	156	0.0015882	40.7	38	98150	158	0.0016098	39.1
39	98068	169	0.0017233	39.7	39	97992	171	0.0017450	38.2
40	97899	183	0.0018693	38.8	40	97821	187	0.0019117	37.3
41	97716	198	0.0020263	37.9	41	97634	203	0.0020792	36.3
42	97518	215	0.0022047	36.9	42	97431	222	0.0022785	35.4
43	97303	233	0.0023946	36.0	43	97209	242	0.0024895	34.5
44	97070	254	0.0026167	35.1	44	96967	265	0.0027329	33.6
45	96816	275	0.0028404	34.2	45	96702	288	0.0029782	32.7
46	96541	297	0.0030764	33.3	46	96414	315	0.0032672	31.8
47	96244	321	0.0033353	32.4	47	96099	346	0.0036005	30.9
48	95923	346	0.0036071	31.5	48	95753	379	0.0039581	30.0
49	95577	370	0.0038712	30.6	49	95374	416	0.0043618	29.1
50	95207	397	0.0041699	29.7	50	94958	456	0.0048021	28.2
51	94810	427	0.0045037	28.8	51	94502	501	0.0053015	27.3
52	94383	465	0.0049267	28.0	52	94001	551	0.0058616	26.5
53	93918	505	0.0053770	27.1	53	93450	606	0.0064848	25.6
54	93413	552	0.0059092	26.2	54	92844	668	0.0071949	24.8
55	92861	603	0.0064936	25.4	55	92176	734	0.0079630	24.0
56	92258	658	0.0071322	24.5	56	91442	808	0.0088362	23.1
57	91600	714	0.0077948	23.7	57	90634	885	0.0097645	22.3
58	90886	772	0.0084942	22.9	58	89749	971	0.0108191	21.5
59	90114	835	0.0092660	22.1	59	88778	1060	0.0119399	20.8
60	89279	900	0.0100808	21.3	60	87718	1157	0.0131900	20.0
61	88379	979	0.0110773	20.5	61	86561	1258	0.0145331	19.3
62	87400	1073	0.0122769	19.7	62	85303	1362	0.0159666	18.5
63	86327	1184	0.0137153	18.9	63	83941	1471	0.0175242	17.8
64	85143	1308	0.0153624	18.2	64	82470	1584	0.0192070	17.1
65	83835	1447	0.0172601	17.5	65	80886	1699	0.0210049	16.4
66	82388	1586	0.0192504	16.7	66	79187	1817	0.0229457	15.8
67	80802	1723	0.0213237	16.1	67	77370	1937	0.0250355	15.1
68	79079	1860	0.0235208	15.4	68	75433	2057	0.0272692	14.5
69	77219	1995	0.0258356	14.7	69	73376	2179	0.0296964	13.9
70	75224	2126	0.0282623	14.1	70	71197	2303	0.0323469	13.2
71	73098	2250	0.0307806	13.5	71	68894	2424	0.0351845	12.7
72	70848	2364	0.0333672	12.9	72	66470	2547	0.0383180	12.1
73	68484	2466	0.0360084	12.3	73	63923	2666	0.0417064	11.5
74	66018	2560	0.0387773	11.7	74	61257	2786	0.0454805	11.0
75	63458	2745	0.0432570	11.1	75	58471	2892	0.0494604	10.5
76	60713	2869	0.0472551	10.6	76	55579	2990	0.0537973	9.9
77	57844	2984	0.0515870	10.1	77	52589	3079	0.0585484	9.5
78	54860	3090	0.0563252	9.6	78	49510	3153	0.0636841	9.0
79	51770	3182	0.0614642	9.1	79	46357	3210	0.0692452	8.5
80	48588	3258	0.0670536	8.6	80	43147	3248	0.0752775	8.1
81	45330	3316	0.0731524	8.1	81	39899	3265	0.0818316	7.7
82	42014	3351	0.0797591	7.7	82	36634	3256	0.0888792	7.3
83	38663	3362	0.0869565	7.3	83	33378	3223	0.0965606	6.9
84	35301	3346	0.0947849	6.9	84	30155	3162	0.1048582	6.5
85	31955	3299	0.1032389	6.5	85	26993	3071	0.1137702	6.1
86	28656	3221	0.1124023	6.1	86	23922	2953	0.1234429	5.8
87	25435	3111	0.1223118	5.8	87	20969	2806	0.1338166	5.5
88	22324	2971	0.1330855	5.5	88	18163	2635	0.1450752	5.2
89	19353	2800	0.1446804	5.1	89	15528	2439	0.1570711	4.9
90	16553	2602	0.1571920	4.8	90	13089	2226	0.1700665	4.6
91	13951	2381	0.1706688	4.6	91	10863	1999	0.1840191	4.3
92	11570	2143	0.1852204	4.3	92	8864	1763	0.1988944	4.1
93	9427	1893	0.2008062	4.0	93	7101	1525	0.2147585	3.8
94	7534	1638	0.2174144	3.8	94	5576	1293	0.2318867	3.6
95	5896	1388	0.2354138	3.6	95	4283	1071	0.2500584	3.4
96	4508	1148	0.2546584	3.4	96	3212	865	0.2693026	3.2
97	3360	924	0.2750000	3.2	97	2347	680	0.2897316	3.0
98	2436	722	0.2963875	3.0	98	1667	519	0.3113377	2.9
99	1714	548	0.3197200	2.8	99	1148	384	0.3344948	2.7

100	1166	401	0.3439108	2.6	100	764	274	0.3586387	2.5
101	765	282	0.3686275	2.5	101	490	188	0.3836735	2.4
102	483	183	0.3788820	2.4	102	302	124	0.4105960	2.3
103	300	128	0.4266667	2.2	103	178	78	0.4382022	2.2
104	172	74	0.4302326	2.2	104	100	45	0.4500000	2.1
105	98	45	0.4591837	2.1	105	55	26	0.4727273	2.0
106	53	25	0.4716981	1.9	106	29	14	0.4827586	1.9
107	28	14	0.5000000	1.8	107	15	8	0.5333333	1.7
108	14	8	0.5714286	1.6	108	7	4	0.5714286	1.6
109	6	4	0.6666667	1.3	109	3	2	0.6666667	1.3
110	2	2	1.0000000	1.0	110	1	1	1.0000000	1.0

9.3. Tablas de Mortalidad Experiencia ISS 2010

La actualización de las tablas de mortalidad en Colombia se autoriza a través de la resolución número 1555 de 2010. La siguiente tabla corresponde a las nuevas tablas:

y = hombre

y	ly	dy	qy	ey	x	lx	dx	qx	ex
15	1000000	485	0.000485	64.8	15	1000000	272	0.000272	70.0
16	999515	496	0.000496	63.9	16	999728	278	0.000278	69.1
17	999019	509	0.000509	62.9	17	999450	285	0.000285	68.1
18	998510	522	0.000523	61.9	18	999165	293	0.000293	67.1
19	997988	537	0.000538	60.9	19	998872	302	0.000302	66.1
20	997451	553	0.000554	60.0	20	998570	311	0.000311	65.1
21	996898	571	0.000573	59.0	21	998259	321	0.000322	64.2
22	996327	591	0.000593	58.0	22	997938	332	0.000333	63.2
23	995736	612	0.000615	57.1	23	997606	344	0.000345	62.2
24	995124	636	0.000639	56.1	24	997262	357	0.000358	61.2
25	994488	662	0.000666	55.1	25	996905	372	0.000373	60.2
26	993826	690	0.000694	54.2	26	996533	388	0.000389	59.3
27	993136	721	0.000726	53.2	27	996145	405	0.000407	58.3
28	992415	755	0.000761	52.3	28	995740	425	0.000427	57.3
29	991660	792	0.000799	51.3	29	995315	446	0.000448	56.3
30	990868	832	0.000840	50.3	30	994869	469	0.000471	55.4
31	990036	877	0.000886	49.4	31	994400	494	0.000497	54.4
32	989159	926	0.000936	48.4	32	993906	522	0.000525	53.4
33	988233	979	0.000991	47.5	33	993384	552	0.000556	52.4
34	987254	1038	0.001051	46.5	34	992832	585	0.000589	51.5
35	986216	1102	0.001117	45.6	35	992247	622	0.000627	50.5
36	985114	1172	0.001190	44.6	36	991625	662	0.000668	49.5
37	983942	1249	0.001269	43.7	37	990963	705	0.000711	48.6
38	982693	1333	0.001356	42.7	38	990258	753	0.000760	47.6
39	981360	1424	0.001451	41.8	39	989505	806	0.000815	46.6
40	979936	1525	0.001556	40.8	40	988699	863	0.000873	45.7
41	978411	1635	0.001671	39.9	41	987836	926	0.000937	44.7
42	976776	1755	0.001797	39.0	42	986910	994	0.001007	43.7
43	975021	1886	0.001934	38.0	43	985916	1070	0.001085	42.8
44	973135	2030	0.002086	37.1	44	984846	1152	0.001170	41.8
45	971105	2186	0.002251	36.2	45	983694	1242	0.001263	40.9
46	968919	2358	0.002434	35.3	46	982452	1341	0.001365	39.9
47	966561	2544	0.002632	34.4	47	981111	1448	0.001476	39.0
48	964017	2748	0.002851	33.4	48	979663	1566	0.001599	38.0
49	961269	2971	0.003091	32.5	49	978097	1695	0.001733	37.1
50	958298	3213	0.003353	31.6	50	976402	1836	0.001880	36.2
51	955085	3477	0.003641	30.7	51	974566	1990	0.002042	35.2

52	951608	3765	0.003956	29.9	52	972576	2158	0.002219	34.3
53	947843	4077	0.004301	29.0	53	970418	2341	0.002412	33.4
54	943766	4418	0.004681	28.1	54	968077	2541	0.002625	32.5
55	939348	4744	0.005050	27.2	55	965536	2735	0.002833	31.6
56	934604	5106	0.005463	26.4	56	962801	2950	0.003064	30.6
57	929498	5507	0.005925	25.5	57	959851	3189	0.003322	29.7
58	923991	5952	0.006442	24.6	58	956662	3456	0.003613	28.8
59	918039	6444	0.007019	23.8	59	953206	3752	0.003936	27.9
60	911595	6988	0.007666	23.0	60	949454	4082	0.004299	27.0
61	904607	7588	0.008388	22.1	61	945372	4447	0.004704	26.2
62	897019	8250	0.009197	21.3	62	940925	4853	0.005158	25.3
63	888769	9134	0.010277	20.5	63	936072	5303	0.005665	24.4
64	879635	10078	0.011457	19.7	64	930769	5801	0.006232	23.5
65	869557	11080	0.012742	19.0	65	924968	6351	0.006866	22.7
66	858477	12143	0.014145	18.2	66	918617	6959	0.007576	21.8
67	846334	13265	0.015673	17.4	67	911658	7629	0.008368	21.0
68	833069	14446	0.017341	16.7	68	904029	8367	0.009255	20.2
69	818623	15683	0.019158	16.0	69	895662	9177	0.010246	19.4
70	802940	16972	0.021137	15.3	70	886485	10065	0.011354	18.6
71	785968	18310	0.023296	14.6	71	876420	11036	0.012592	17.8
72	767658	19688	0.025647	14.0	72	865384	12095	0.013976	17.0
73	747970	21098	0.028207	13.3	73	853289	13245	0.015522	16.2
74	726872	22530	0.030996	12.7	74	840044	14490	0.017249	15.5
75	704342	23970	0.034032	12.1	75	825554	15832	0.019177	14.7
76	680372	25402	0.037335	11.5	76	809722	17272	0.021331	14.0
77	654970	26808	0.040930	10.9	77	792450	18809	0.023735	13.3
78	628162	28168	0.044842	10.4	78	773641	20439	0.026419	12.6
79	599994	29456	0.049094	9.8	79	753202	22154	0.029413	11.9
80	570538	30646	0.053714	9.3	80	731048	23943	0.032752	11.3
81	539892	31711	0.058736	8.8	81	707105	25791	0.036474	10.6
82	508181	32619	0.064188	8.3	82	681314	27677	0.040623	10.0
83	475562	33340	0.070107	7.8	83	653637	29572	0.045242	9.4
84	442222	33841	0.076525	7.4	84	624065	31445	0.050387	8.9
85	408381	34093	0.083483	7.0	85	592620	33252	0.056110	8.3
86	374288	34069	0.091023	6.6	86	559368	34945	0.062472	7.8
87	340219	33745	0.099186	6.2	87	524423	36469	0.069541	7.3
88	306474	33103	0.108012	5.8	88	487954	37762	0.077388	6.8
89	273371	32136	0.117555	5.4	89	450192	38757	0.086090	6.3
90	241235	30844	0.127859	5.1	90	411435	39386	0.095728	5.8
91	210391	29239	0.138975	4.8	91	372049	39709	0.106731	5.4
92	181152	27344	0.150945	4.5	92	332340	39700	0.119456	5.0
93	153808	25199	0.163834	4.2	93	292640	39188	0.133912	4.6
94	128609	22851	0.177678	3.9	94	253452	38041	0.150092	4.2
95	105758	20363	0.192543	3.6	95	215411	36189	0.168000	3.9
96	85395	17839	0.208900	3.3	96	179222	33628	0.187633	3.5
97	67556	15350	0.227219	3.1	97	145594	30428	0.208992	3.2
98	52206	12921	0.247500	2.9	98	115166	26728	0.232082	3.0
99	39285	10597	0.269747	2.6	99	88438	22719	0.256892	2.7
100	28688	8433	0.293956	2.4	100	65719	18627	0.283434	2.5
101	20255	6484	0.320118	2.2	101	47092	14679	0.311709	2.3
102	13771	4796	0.348268	2.1	102	32413	11075	0.341684	2.1
103	8975	3395	0.378273	1.9	103	21338	7968	0.373418	1.9
104	5580	2290	0.410394	1.7	104	13370	5440	0.406881	1.7
105	3290	1462	0.444377	1.6	105	7930	3505	0.441992	1.6
106	1828	878	0.480306	1.4	106	4425	2119	0.478870	1.4
107	950	492	0.517895	1.3	107	2306	1194	0.517780	1.3
108	458	256	0.558952	1.1	108	1112	620	0.557554	1.1
109	202	121	0.599010	0.9	109	492	295	0.599593	0.9

```
110         81    81    1.000000  0.5     110         197    197    1.000000  0.5
```

9.4. Código R para la estimación de la distribución Gompertz-Makeham

El siguiente es el código utilizado para la estimación de los parámetros de la distribución GM.

```
#  ajuste de una ley makeham a la tabla iss
#   usando ux=qx/(1-qx/2) y la metodologia de brown
#   para edades avanzadas. se compara con la metodologia
#   usual
##
source("tpx.r")
archivo1 = "tabla hm iss8089.dat"
archivo2 = "tabla hm 2010.dat"

D = read.table(archivo1,header=T)
attach(D) #  y = h  x = m

nx = length(lx)


for(i in 1:nx){
if( i >= 75 ) qx[i]=1.09*qx[i-1]
}

ux = qx/(1-qx/2)

mx = double(nx)
for( i in 3:(nx-2)){
mx[i]=(8.0*(lx[i-1]-lx[i+1])-(lx[i-2]-lx[i+2]))/(12.0*lx[i])
}

mx[nx-1] = 1.07*mx[nx-2]
mx[nx] = 1.07*mx[nx-1]
mx[1]=mx[3]
mx[2]=mx[3]

start = list(a=0.004115, b=0.0001419, c=1.0827)
```

```
modelo1 = nls(ux ~ a + b*c^x,
data=data.frame(ux=ux,x=x),
start = list(a=a2, b=b2, c=c2),
control=nls.control(maxiter=150, tol=0.01),
trace = TRUE)

summary(modelo1)

mxest = fitted(modelo1)


title = 'Ajuste de la Tabla ISS/80-89  H '
plot(x,mx,type='l',main=title)
lines(x,mxest,col='red')



M1 = coef(modelo1)

a = M1[1]
b = M1[2]
c = M1[3]
s=exp(-a)
g=exp(-b/log(c))



(pxest = tpx(s,g,c,x,1))
plot(x,-log(1-qx),type='l')
lines(x,-log(pxest),col='red')

(cbind(x,1-qx,pxest))


modelo2 = nls(mx ~ a + b*c^x,
data=data.frame(mx=mx,x=x),
start = list(a=0.004115, b=0.0001419, c=1.0827))

summary(modelo2)

M2 = coef(modelo2)
```

```
a2 = M2[1]
b2 = M2[2]
c2 = M2[3]
s2=exp(-a2)
g2=exp(-b2/log(c2))

(pxest2 = tpx(s2,g2,c2,x,1))

(cbind(x,lx,1-qx,pxest,pxest2))

plot(x,-log(1-qx),type='l')
lines(x,-log(pxest2),col='red')
lines(x,-log(pxest),col='blue')

pxest = tpx(s,g,c,62,seq(1,110-62,1))

pxest2 = tpx(s2,g2,c2,62,seq(1,110-62,1))

plot(seq(63,110,1),pxest,type='l')
lines(seq(63,110,1),pxest2,col='red')

X = cbind(as.integer(seq(63,110,1)),pxest,pxest2)

print(format(X,scientific=F, digits = 3 , nsmall = 1))
```

9.5. Código R: estimación riesgos de extralongevidad y tasas de interés

El siguiente es el código utilizado para la estimación de los los diferentes casos de análisis que surgen de la combinación de los riesgos de extralongevidad y riesgo de tasas de interés.

```
N=6000

#parametos originales tabla ISS 2010 - Mujeres

c1 = 1.1155694
```

```
s1 = 0.999999
g1 = 0.9999493
x = 57
tx1 = rgm(N,s1,g1,c1,x)
n1 = ceiling(360*tx1)


#------ GM mujeres disminuyendo el valor de c

c2 = 1.1055694
s2 = 0.999999
g2 = 0.9999493

tx2 = rgm(N,s2,g2,c2,x)
n2 = ceiling(360*tx2)

# variables del modelo para los rendimientos diarios

sigma2.eta = 2.036956e-06
alpha = 13.211654e+03
beta  =  6.13414e+00
gamma = sqrt(alpha^2 - beta^2)
delta = 9.413414e-04
mu    = -delta*beta/gamma

(media = mu + delta*beta/gamma)
(desv = sqrt(delta*alpha^2/gamma^3))
(curtosis = 3*(1+4*beta^2/alpha^2)/(delta*gamma))
(asim = 3*beta/(alpha*sqrt(delta*gamma)))


zeta =  c(0.842867886,  0.236874943,
  -0.310449682, -0.067767001,
   0.760304191, -0.525034600,
   0.063737232, -0.005735015,
   0.022706379, -0.033704470,
  0.004226436,  0.014220664,
 -0.011556283, -0.038855953,
  0.046355579, -0.000620833,
  0.004037167, -0.011247296,
  0.003798208,  0.005512096,
```

```
 -0.007075011, -0.013844656,
  0.018721509,  0.010286579,
 -0.025458458,  0.101008791,
 -0.139039132,  0.008670720,
  0.044244945, -0.027505188,
 -0.160225383,  0.190095489)

#----------------------------------------------
# iq = tasa de incremento de los pagos, efectiva para el periodo


sigma = 2.036956e-06
r = 360
P1 = 0.53
ia = 0.0959  #tasa ipc
(iq = (1+ia)/1.04 -1)

(mu.ar1  = (1+0.11)^(1/360) - 1)
(mu.ar2  = (1+0.08)^(1/360) - 1)

# ----------------------------------------

#aca se utiliza el beta de la nig que es la que controla las tasas
#para generar mayor riesgo se utiliza una nig negativa


    beta1= -beta
    e1 = rnorm(max(n2),0,sigma)
    z1 = mu.ar1+filter(e1, zeta, method = "recursive")
    es1 = rnig(n=max(n2), alpha = alpha, beta = beta1, delta = delta, mu = mu)
    tea1 = z1 + es1

    e2 = rnorm(max(n2),0,sigma)
    z2 = mu.ar2+filter(e2, zeta, method = "recursive")
    es2 = rnig(n=max(n2), alpha = alpha, beta = beta1, delta = delta, mu = mu)
    tea2 = z2 + es2


#----------------------------------------------

#V11 = c1 con tea1
```

```
V11 = double(6000)

   for(j in 1:6000){
   t = seq(1,n1[j],1)
   ck = ifelse(t%%30 == 0, 1, 0)
   ck = P1*ck*(1+iq)^floor(t/r)
    V11[j] = sum(ck/cumprod(1+tea1[1:n1[j]]))
   }


#---------------------------------------------

#V12 = c1 con tea2

V12 = double(6000)

   for(j in 1:6000){
   t = seq(1,n1[j],1)
   ck = ifelse(t%%30 == 0, 1, 0)
   ck = P1*ck*(1+iq)^floor(t/r)
    V12[j] = sum(ck/cumprod(1+tea2[1:n1[j]]))
   }
#---------------------------------------
#V21 = c2 con tea1

V21 = double(6000)

   for(j in 1:6000){
   t = seq(1,n2[j],1)
   ck = ifelse(t%%30 == 0, 1, 0)
   ck = P1*ck*(1+iq)^floor(t/r)
    V21[j] = sum(ck/cumprod(1+tea1[1:n2[j]]))
   }


#---------------------------------------
#V22 = c2 con tea2

V22 = double(6000)
```

```
   for(j in 1:6000){
   t = seq(1,n2[j],1)
   ck = ifelse(t%%30 == 0, 1, 0)
   ck = P1*ck*(1+iq)^floor(t/r)
    V22[j] = sum(ck/cumprod(1+tea2[1:n2[j]]))
   }
#----------------------------------------
par(mfrow=c(1,1))
plot(density(V11),
ylim=c(0,0.08), xlim=c(0,200),
col='red',lty=1,lwd=2,main="",
xlab="x")
points(quantile(V11,0.9),0,pch=19,col='red')

lines(density (V21),
ylim=c(0,0.08), xlim=c(0,120),
col='blue',lty=2,lwd=2)
points(quantile(V21,0.9),0,pch=19,col='blue')

lines(density (V12),
ylim=c(0,0.08), xlim=c(0,120),
col='magenta',lty=3,lwd=2)
points(quantile(V12,0.9),0,pch=19,col='magenta')

lines(density (V22),
ylim=c(0,0.08), xlim=c(0,120),
col='brown',lty=4,lwd=2)
points(quantile(V22,0.9),0,pch=19,col='brown')

legend("topleft",
c("c=1.11, m1 = 14% ",
"c=1.10, m1 = 14%",
"c=1.11, m2 = 8%",
"c=1.10, m2 = 8%"),
col = c("red","blue","magenta","brown"),
lty = c(1,2,3,4),
lwd=c(2,2,2,2) )
#----------------------------------------------

med = c(mean(V11),
mean(V21),
```

```
mean(V12),
mean(V22))

dest = c(sd(V11),
sd(V21),
sd(V12),
sd(V22))

curt = c(kurtosis(V11),
kurtosis(V21),
kurtosis(V12),
kurtosis(V22))

asim = c(skewness(V11),
skewness(V21),
skewness(V12),
skewness(V22))


require(xtable)

A = cbind(med,dest,curt,asim)

rownames(A)=c("media","des.est",
"curtosis","asimetria")
colnames(A) = c("c=1.11, m1 = 14% ",
"c=1.10, m1 = 14%",
"c=1.11, m2 = 8%",
"c=1.10, m2 = 8%")

print(xtable(A))


#---------------------------------------------

quantile(V11,c(0.5,0.8,0.9,0.95,0.99))
quantile(V21,c(0.5,0.8,0.9,0.95,0.99))
quantile(V12,c(0.5,0.8,0.9,0.95,0.99))
quantile(V22,c(0.5,0.8,0.9,0.95,0.99))

#---------------------------------------------
```

```
#par(mfrow=c(2,1))
#ts.plot(tea1[1:365])
#abline(h=0)
#abline(h=mean(tea1))
#ts.plot(tea2[1:365])
#abline(h=0)
#abline(h=mean(tea2))

#---------------------------------------------

par(mfrow=c(1,1))
ts.plot(tea1[1:365],col='red')
abline(h=0)
abline(h=mean(tea1),col='red')
lines(tea2[1:365],col='blue')
abline(h=mean(tea2),col='blue')
#abline(h=0.00025440,col='grey')

#---------------------------------------------

layout(1:2)
hist(tea1,200)
abline(v=mean(tea1),col='red')
hist(tea2,200)
abline(v=mean(tea2),col='blue')

(mean(tea1))
(mean(tea2))
```

Bibliografía

BROVERMAN, S. (1986): "The Rate of Return on Life Insurance and Annuities," *The Journal of Risk and Insurance*, 53(3), 419–434.

CARRIERE, J. F. (1995): "An Investigation of the Gompertz Law of Mortality," *Actuarial Research Clearing House*, pp. 161–177.

CHU, T. N. (2003): "Stochastic Simulation in Valuing Mortality and Investment Risks in Life Annuity Contracts," *University of the Philippines, Deparrment of Mathematics*.

DHAENE, J., M. DENUIT, M. GOOVAERTS, R. KAAS, AND D. VYNCKE (2001): "The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory," pp. 1–50.

GIACCOTTO, C. (1986): "Stochastic Modelling of Interest Rates Actuarial vs Equilibrium Approach," *The Journal of Risk and Insurance*, 53(3), 435–453.

HACKING, I. (1995): *El Surgimiento de la Probabilidad*. Editorial Gedisa S.A., Barcelona, España.

LAI, S.-W., AND E. W. FREES (1995): "Examing Changes in Reserves Using Stochasti Interest Models," *The Journal of Risk and Insurance*, 62(3), 535–574.

MEREU, J. A. (1965): "Annuity Values Directly from The Makeham Constants," *Transactions of Society of Actuaries*, 14, 269–308.

MILEVSKY, M.A. Y ROBINSON, C. (2000): "Self-Annuitization and Ruin in Retirement," *North American Actuarial Journal*, 4(4), 112–129.

PANJER, H., AND B. D. R. (1980): "Stochastic Modelling of interest Rates with Applications to Life Contingencies," *Journal of Risk and Insurance*, 47(1), 91–110.

——— (1981): "Stochastic Modelling of interest Rates with Applications to Life Contingencies. Part II," *The Journal of Risk and Insurance*, 48(4), 628–637.

PARKER, G. (1993a): "Distribution of the present value of future cash flows," *Proceedings of the XXIV ASTIN Colloquium, Rome*, pp. 831–843.

——— (1993b): "Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions," *Proceedings of the XXIV ASTIN Colloquium*, pp. 367–389.

STOCK, J. H., AND D. A. WISE (1990): "Pensions, the Option Value of Work, and Retirement," *Econometrica*, 58(5), 1151–1180.

ZARRUK, A., AND F. CARDOSO (2010): "Nuevas tablas de Mortalidad de Rentistas," *Revista Fasecolda*, pp. 20–24.