

Carta de control EWMA para el coeficiente de variación

Marley Cecilia Vergara Benavides

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2011

Carta de control EWMA para el coeficiente de variación

Marley Cecilia Vergara Benavides

Tesis de grado presentada como requisito para optar al título de:
Magister en Ciencias-Estadística

Director:

José Alberto Vargas Navas Ph.D.

Línea de Investigación:

Control de Calidad

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística

Bogotá, Colombia

2011

A mi familia

Agradecimientos

Al director de tesis doctor José Alberto Vargas, por su constante apoyo y colaboración durante el desarrollo de este trabajo.

A los profesores: Luis López, Fabio Nieto, Campo Elias Pardo, Liliana Blanco, Ramón Giraldo, Leonardo Trujillo, por haberme enseñado durante todos estos semestres en la maestría.

A la Universidad Nacional de Colombia y a la Universidad de Cartagena por brindarme esta maravillosa oportunidad.

A mis compañeros de estudios: Ana, Adalberto, Edgar, Elias, Ivon, Treco y Willian por todos esos momentos de alegrías y tristezas vividos durante la maestría.

Marley Cecilia Vergara Benavides
Cartagena, Bolivar
2011

Resumen

Las cartas de control tradicionales Shewhart identifican cambios grandes en los parámetros de un proceso de producción y las cartas CUSUM y EWMA detectan cambios pequeños en los mismos. Sin embargo, estos esquemas llevan a análisis e interpretaciones erróneas en los ensayos clínicos y químicos, en donde las variables a monitorear son continuas con medias y varianzas no constantes y guardan relación de proporcionalidad entre sí. Como solución a este problema Hawkins et al. (2007) desarrollan la carta de control para el coeficiente de variación (Shewhart-CV), en la cual considera estos casos.

En este trabajo se propone una carta de control EWMA para el Coeficiente de Variación (EWMA-CV) que identifique pequeños cambios en los parámetros de un proceso siguiendo la metodología de Hawkins et al. (2007). La ARL del nuevo esquema se comparó con la ARL de la carta propuesta por los autores mediante simulaciones en el programa estadístico **R** y se concluyó que la carta EWMA-CV es más sensible a pequeños y medianos cambios en el coeficiente de variación del proceso.

Palabras clave: ARL, Carta CUSUM, Carta EWMA, Carta EWMA-CV, Carta Shewhart, Coeficiente de variación.

Abstract

The traditional Shewhart control charts identify big changes in the parameters of a production process and CUSUM and EWMA charts detect small changes in them. However, these schemes lead to erroneous analysis and interpretation in clinical trials and chemicals, where the variables are continuous monitor with non constant means and variances of proportionality and relate to each other. To solve this problem Hawkins et al. (2007) developed the control chart for the coefficient of variation (Shewhart-CV), which considers these cases.

In this paper we propose an EWMA control chart for the Coefficient of Variation (CV-EWMA) to identify small changes in the parameters of a process according to the method of Hawkins et al. (2007). The ARL of the new scheme was compared to the ARL of the chart proposed by the authors through simulations in the statistical program **R** and concluded that the *EWMA-CV* chart is more sensitive to small and medium changes in the coefficient of variation the process.

Keywords: ARL, CUSUM chart, EWMA chart, Shewhart chart, Coefficient of variation.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xi
1. Introducción	1
2. Cartas de control para monitorear la variabilidad de un proceso	3
2.1. Cartas de control para monitorear la dispersión	3
2.2. Cartas de control EWMA para monitorear la dispersión	6
3. Cartas de control Shewhart para el coeficiente de variación	9
4. Carta de control EWMA para monitorear γ	13
4.1. Planteamiento del estadístico de control y límites de control	13
4.2. Comparación y simulación	15
4.2.1. Subgrupo de tamaño $n = 5$	16
4.2.2. Subgrupo de tamaño $n = 10$	16
4.2.3. Subgrupo de tamaño $n = 15$	17
4.3. Ejemplo	18
5. Conclusiones, Recomendaciones y Trabajo futuro	23
5.1. Conclusiones	23
5.2. Recomendaciones	23
A. Anexo: Algoritmo	24
A.1. Tablas y gráficas para el ejemplo de la carta R	24
A.2. Tablas para L y límites de control para diferentes valores de λ	26
A.3. Programas para calcular las ARL's	27
A.4. Programas para las gráficas de la carta CV y la EWMA-CV	30
A.5. Implementación de la carta EWMA-CV	31

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
L	Constante que acompaña los límites de control	1	
m	Número de muestras	1	
n	Tamaño de muestra	1	
R_i	Rango muestral	1	
S_i	Varianza muestral	1	
Z_0	Valor inicial de la estadística EWMA	1	
Z_t	Estadística EWMA		

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
α	Parámetro de localización de la distribución Gamma	1	
β	Parámetro de escala de la distribución Gamma	1	
γ	Coficiente de variación poblacional	1	
λ	Constante de suavizado	1	
μ	Media poblacional	1	
μ_0	Promedio objetivo de un proceso de control	1	
σ_a	Aumento en la desviación estándar muestral	1	
σ_0	Desviación estándar muestral	1	

Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>ARL</i>	Longitud promedio de corrida
<i>LC</i>	Límite de control central
<i>CPT</i>	Control estadístico de procesos
<i>LCL</i>	Límite de control inferior
<i>RL</i>	Longitud de corrida
<i>UCL</i>	Límite de control superior

1. Introducción

La globalización y la apertura de los mercados han provocado afán en las empresas por ser cada vez más competitivas para poder sobrevivir en el contexto de los nuevos mercados, donde el cliente, debido a la inmensa gama de productos, es más exigente. Esta situación genera en las empresas una preocupación por fabricar artículos con cero defectos mediante técnicas de control de calidad, las cuales permiten reducir las pérdidas por productos que no cumplen con las características exigidas por el consumidor e incrementar la rentabilidad.

Para verificar que los productos cumplen con las especificaciones y estándares requeridos las empresas han diseñado programas control estadístico de procesos (SPC), dentro de los cuales se encuentran las cartas de control. Estos esquemas son gráficos usados principalmente para el estudio y monitoreo de la variabilidad de la calidad de un producto en procesos repetitivos, que puede ser originada por causas aleatorias o por causas asignables. Estas últimas representan el verdadero interés para los empresarios del sector industrial, puesto que son atribuidas a errores humanos o de la materia prima los cuales pueden ser corregidos. Con este objeto se construyen cartas de control para la media, la varianza, el coeficiente de variación entre otros parámetros estadísticos.

En el caso univariado, la carta Shewhart \bar{X} es la más utilizada para monitorear la media, y las cartas Shewhart R o S son las más usadas para monitorear la varianza. Cuando se trata de detectar pequeños cambios en los parámetros de un proceso univariado, las cartas Shewhart son poco sensibles, así que en estos casos se utilizan los esquemas *CUSUM* y *EWMA*, los cuales han sido investigados en las últimas décadas. Estas cartas son conocidas como esquemas de monitoreo en línea, pues se utilizan principalmente en Fase II .

En los ensayos clínicos, químicos, físico-químicos y farmacéuticos se presentan casos donde la media y varianza no son constantes y por tanto no es conveniente usar cartas separadas para media y varianza. Para las situaciones donde la varianza está en función de la media o guarda relación con esta Hawkins et al. (2007) han propuesto una carta Shewhart para el coeficiente de variación. Esta se basa en el supuesto de que la desviación estándar es directamente proporcional a la media del proceso, originando así un coeficiente de variación muestral constante. La simplicidad en la interpretación y el manejo de esta carta hacen de esta una buena herramienta para la detección de cambios grandes en los parámetros del

proceso.

Teniendo en cuenta que en la mayoría de los ensayos clínicos los cambios pequeños son de vital importancia en la determinación de un diagnóstico, que las cartas *EWMA* se diseñaron para detectar variaciones pequeñas en un proceso que monitorea media y varianza constante y dado en ensayos clínicos y químicos estos parámetros no son contantes, sino que guardan relación de proporcionalidad entre sí, en este trabajo se propone la carta de control *EWMA* para el Coeficiente de Variación *EWMA-CV* siguiendo la metodología propuesta por Hawkins et al. (2007).

En el capítulo 2, se presenta una breve descripción de las cartas de control para monitorear la variabilidad de un proceso en los esquemas *R*, *S*, *CUSUM R*, *CUSUM S* y *EWMA*, a manera de ejemplo se ilustra un gráfico de la carta de control *R*. El capítulo 3 describe los trabajos realizados por otros autores sobre la función de distribución para el coeficiente de variación, luego se explica la construcción e implementación de la carta Shewhart de Hawkins et al. (2007). Posteriormente, en el capítulo 4 se muestra la carta de control propuesta, *EWMA-CV*, se exponen tablas para valores de n y L encontrados por simulaciones en el programa estadístico **R**, se compara la *ARL* de las cartas *Shwhart-CV* y *EWMA-CV* para subgrupos de tamaño 5, 10 y 15, se ilustra el esquema propuesto mediante un ejemplo realizado con datos reales y se muestra que la carta *EWMA-CV* es superior a la carta Shewhart de Hawkins et al. (2007) en escenarios donde el objetivo es detectar pequeños y medianos cambios en el coeficiente de variación del proceso. Finalmente en el capítulo 6 se exponen las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

2. Cartas de control para monitorear la variabilidad de un proceso

2.1. Cartas de control para monitorear la dispersión

Cuando se analiza un proceso de producción de control de calidad univariado, se debe monitorear la variabilidad del mismo. En la actualidad existen cartas de control especializadas en este tema, entre ellas se encuentran las cartas Shewhart, CUSUM y EWMA. Los esquemas Shewhart más conocidos debido a su sencillez y fácil aplicación son la carta S y la R , siendo esta última la más utilizada para este objetivo.

A continuación se presenta una descripción de las cartas univariadas más utilizadas en control estadístico de procesos de calidad:

La construcción de la carta de control Shewhart se basa en el supuesto que la muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_t , $t = 1, 2, 3, \dots$ de la variable aleatoria X tiene distribución normal e independiente, con media μ y varianza σ^2 constantes, la línea central o valor objetivo de los datos es el parámetro a monitorear, UCL y LCL como límites de control superior e inferior, los cuales se encuentran ubicados a tres desviaciones estándar ($\pm 3\sigma$) del valor objetivo.

En la práctica los parámetros son desconocidos, por tal razón hay que estimarlos a través de un conjunto de datos históricos tomados de un proceso que se supone bajo control, depurarlos hasta garantizar que la variabilidad del mismo se debe a causas aleatorias; la estimación de estos parámetros se coloca en los límites de control, terminando así, lo que Montgomery (2001) llama Fase I del proceso. Una vez los límites de control son definidos, se pasa a la Fase II, en donde se monitorea en línea el proceso mediante la toma de muestras de tamaño n a intervalos regulares de tiempo, calculando el estadístico y graficándolo dentro de los límites de control definidos en la Fase I.

En todo proceso de producción que se encuentra en la Fase II, se le llama longitud de corrida (RL) al número de puntos graficados en la carta hasta que aparezca una señal fuera de control. Al valor esperado de la variable aleatoria RL , se le conoce con el nombre de longitud promedio de corrida (ARL). Las cartas tradicionales Shewhart tienen una $ARL = 370$ así, la probabilidad de que una muestra exceda un límite de control debido a causas aleato-

rias es $p = 0,0027$.

Las cartas R y S , son los esquemas Shewhart más utilizados en un proceso de producción; la carta R (o carta de rangos), es la más conocida entre las univariadas. Montgomery (2001) la describe como la carta que monitorea la dispersión de un proceso basándose en los rangos de cada una de las muestras. La línea central o valor objetivo, es el promedio de los rangos muestrales encontrados a partir de la selección de m grupos de tamaño n , tomados al finalizar la Fase I, que se define como:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

donde, R_i es el rango para cada muestra o subgrupo seleccionado. Los límites de control son con frecuencia $3\hat{\sigma}_R$, donde $\hat{\sigma}_R$ se estima a partir de un conjunto de datos históricos en la Fase I y se pueden expresar en términos de las constantes D_3 y D_4 , las cuales dependen del tamaño de muestra n ($LCI = \bar{R}D_3$ y $LCS = \bar{R}D_4$) y aparecen tabuladas en libros especializados.

Vargas (2006), citando a Chen et al. (2001) presenta un ejemplo en donde se ilustra el uso de la carta R el cual se muestra a continuación:

El conjunto de datos corresponde a los diámetros interiores de los cilindros de cierto motor. El conjunto de datos está constituido por 35 muestras de tamaño $n = 5$ recolectadas cada media hora. Estos datos aparecen en la Tabla(A-1). Las medidas reales de los diámetros son de la forma 3.5205, 3.5202, 3.5204, etc., pero en las entradas de la Tabla(A-1) aparecen los tres últimos dígitos de las medidas es decir 205, 202 y 204. Interesa establecer el control estadístico de este proceso mediante una carta R .

En Fase I se estiman los límites de control para la carta R . Para estimar el límite central se calculan los rangos (R_i) para cada uno de los 35 subgrupos de tamaño 5 (columnas 7 y 14 de la Tabla(A-1)), luego se encuentra el promedio de todos los rangos de los grupos, ese valor será el límite de control central (LC) esto es:

$$\bar{R} = \frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} R_i = \frac{289}{35} = 8,26$$

Así $LC = 8,26$.

Posteriormente, como $n = 5$ se tiene que los valores de D_3 y D_4 son 0 y 2.114 respectivamente, entonces $LCI = 0 \times 8,26 = 0$ y $LCS = 2,114 \times 8,26 = 17,46$. Una vez estimados los límites se procede a graficar la carta de control, ver anexo, Figura (A-1).

En la Figura(A-1) los puntos 6 y 16 exceden el límites de control superior; al realizar una investigación del proceso se determinó que estos dos puntos correspondían a tiempos donde el operador se ausentaba y dejaba en su lugar a otro operador con menos experiencia a lo largo de la producción, como se encontraron causas asignables, estas dos muestras son retiradas y se recalculanron de nuevo los límites de control para la carta, los cuales son $LC = 6,91$, $LCS = 14,40$ y $LCI = 0$.

En la Figura(A-2) se muestra la carta R luego de retirar los puntos 6 y 16 y en ella se observa que la variabilidad del proceso ha sido controlada por tanto termina la Fase I del proceso y se puede proceder con la Fase II que consistirá en monitorear el proceso en línea agregando nuevas muestras.

Montgomery (2001), presenta la carta S , que tiene como límite central la media de las desviaciones estándar \bar{S} de los m subgrupos seleccionados en la Fase I, asumiendo que las muestras son normales e independientes y que $E(S) = c_4\sigma$, donde c_4 es una constante que depende del tamaño de muestra, se obtiene el estimador insesgado para σ que es $\frac{\bar{S}}{c_4}$, el cual se utiliza para estimar los límites de control superior e inferior que se ubican a igual distancia del límite central y que dependen de las constantes B_5 y B_6 , las cuales están expresadas solo en función del tamaño de muestra n .

La carta CUSUM propuesta en Montgomery (2001), se utilizó inicialmente para detectar pequeños cambios en la media de un proceso y varios de estos esquemas han sido desarrollados para monitorear la variabilidad del mismo. Montgomery (2001) y Acosta-Mejía et al. (1999), proponen esquemas CUSUM, asumiendo que las muestras seleccionadas aleatoriamente son idénticamente distribuidas con distribución $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

La carta CUSUM R propuesta por Page (1963), tiene como sumas acumuladas superior e inferior a

$$C_i^+ = \max\left[0, \frac{R_i}{\sigma_0} - k + C_{i-1}^+\right], \quad i = 1, 2, \dots$$

$$C_i^- = \min\left[0, \frac{R_i}{\sigma_0} + k + C_{i-1}^-\right], \quad i = 1, 2, \dots$$

siendo $\frac{R_i}{\sigma_0}$ la estadística, R_i el rango para la i -ésima muestra, k el valor de referencia definido en Vargas (2006) como:

$$k = \frac{d_2}{2} \left(1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_0}\right),$$

C_i^+ y C_i^- son los valores de las sumas acumuladas para la observación i , σ_0 y σ_a el valor objetivo y el aumento en la dispersión del proceso respectivamente, definiendo a $C_0^+ = 0$ y

$C_0^- = 0$ como los valores iniciales para las sumas acumuladas; el esquema se considera bajo control si los valores de C_i^+ y C_i^- caen dentro del intervalo $(-h, h)$.

En cuanto a la carta CUSUM S , el estadístico encargado de monitorear la variabilidad del proceso es:

$$\frac{S_i}{\sigma_0}$$

teniendo como sumas acumuladas superiores e inferiores a

$$C_i^+ = \max\left[0, \frac{S_i}{\sigma_0} - k + C_{i-1}^+\right]$$

$$C_i^- = \min\left[0, \frac{S_i}{\sigma_0} + k + C_{i-1}^-\right],$$

siendo S_i la varianza de la i -ésima muestra y tomando como valor de referencia a

$$k = \frac{c_4}{2} \left(1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_0}\right),$$

y $C_0^+ = 0$ y $C_0^- = 0$.

2.2. Cartas de control EWMA para monitorear la dispersión

Stephen y Hamilton (1992) proponen la carta EWMA para el monitoreo de la desviación estándar, tomando la variable $y = \ln(S^2)$, siendo S_t^2 la varianza muestral y definen el estadístico

$$Z_t = \max\left\{(1 - \lambda) Z_{t-1} + \lambda y_t, \ln(\sigma_0^2)\right\}, \quad (2-1)$$

donde $Z_0 = \ln(\sigma_0^2)$, $0 < \lambda \leq 1$ es la constante de suavizamiento, y $y_t = \ln(S_t^2)$. Sabiendo que $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S_t^2 \sim X_{n-1}^2$, y que $S_t^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n-1}\right)$, demuestran que la varianza de $\ln(S_t^2)$ es independiente de σ^2 y que sólo depende del tamaño de muestra n ; los autores utilizan el hecho que $\ln(S_t^2)$ se distribuye *Log-gamma* (Kotz et al. (1994)), con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \frac{\exp\{\alpha(y - \ln(\beta)) - \exp(y - \ln(\beta))\}}{\Gamma(\alpha)}$$

donde β es el parámetro de escala de la distribución Gamma, asociado al parámetro de localización $\ln(\beta)$ de la distribución *Log-gamma*.

Por otro lado Lawless (1982) calcula la media y la varianza de y de la siguiente forma

$$E(y) = \ln(\beta) + \psi(\alpha)$$

$$Var(y) = \psi'(\alpha)$$

siendo $\psi(\alpha)$ y $\psi'(\alpha)$ las funciones digamma y trigamma respectivamente; las cuales se aproximan por expansiones de series infinitas como:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \dots \\ \psi'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{30x^5} + \dots\end{aligned}$$

obteniendo así:

$$E[\log(S^2)] = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \quad (2-2)$$

$$Var[\ln(S^2)] = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \quad (2-3)$$

siendo, los límites de control para esta carta:

$$\begin{aligned}LCS &= E[\ln(\sigma_0^2)] + L \left[Var[\ln(S^2)] \frac{\lambda}{2-\lambda} \right]^{1/2} \\ LC &= E[\ln(\sigma_0^2)]\end{aligned}$$

para $0 < \lambda \leq 1$. Generando, por simulaciones, tablas de *ARL*'s para diferentes combinaciones de λ y L , lo cual demuestra que este esquema es más sensible a pequeños cambios en la desviación estándar que las cartas de control anteriormente mencionadas.

Por otra parte, Philippe (2005) mejora la sensibilidad de la carta propuesta por Lawless (1982), agregando tres parámetros a la transformación logarítmica de S_t^2 como sigue,

$$T_t = a + b \ln(S_t^2 + c), \quad c > 0 \quad (2-4)$$

siendo $a = A_{(n)} - 2B_{(n)} \ln(\sigma_0)$, $b = B_{(n)}$ y $c = C_{(n)}\sigma_0^2$. Los parámetros a , b y c se calculan utilizando la aproximación de la función de distribución T_t a una normal estándar; $A_{(n)}$, $B_{(n)}$ y $C_{(n)}$ dependen solo del tamaño de muestra n y se ajustan a los tres primeros momentos de la distribución Gamma (la media $E(S^2)$, la varianza $Var(S^2)$ y el coeficiente de simetría $\gamma(S^2)$). Stuart and Ord (1994) utiliza la ecuación:

$$w = \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right)^2 + 1} + \left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right) \right]^{1/3} - \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right)^2 + 1} - \left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right) \right]^{1/3}$$

para calcular los valores de a , b , y c y llegando a:

$$A_{(n)} = \frac{B_{(n)}}{2} \ln \left[\frac{w^2(w^2 + 1)}{Var(S^2)} \right]$$

$$B_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\ln(w^2 + 1)}}$$

$$C_{(n)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(S^2)}}{w} - E(S^2).$$

Para la variable $S_t^2 = \sigma_0^2 S^2$, con S^2 la varianza muestral de n variables aleatorias independientes, distribuidas $N(\mu, \sigma_0^2)$, el estadístico se convierte en:

$$T_t = A_{(n)} - 2B_{(n)} \ln \sigma_0 + B_{(n)} \ln [S_t^2 + C_{(n)} \sigma_0^2]$$

que es equivalente a la ecuación (2-4). Así, la función de distribución de T_t toma la forma:

$$f_{T_t} \left(\frac{t}{n} \right) = \frac{1}{B_{(n)}} e^{\left(\frac{t - A_{(n)}}{B_{(n)}} \right)} f_G \left[e^{\left(\frac{t - A_{(n)}}{B_{(n)}} \right)} - C_{(n)} \left| \frac{n-1}{2}, \frac{2}{n-1} \right. \right]$$

para $t > A_{(n)} + B_{(n)} \ln [C_{(n)}]$ y depende solo del tamaño de muestra n . Utilizando el hecho que $Z_0 = E[a + \ln(S^2 + c)]$ y realizando cálculos y simplificaciones se llega a que el valor objetivo y los límites de control superior e inferior para esta carta de control son:

$$Z_0 \simeq A_{(n)} + B_{(n)} \ln [1 + C_{(n)}]$$

$$UCL = E(T_t) + L \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)^{1/2} \sigma(T_t)$$

$$LCL = E(T_t) - L \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)^{1/2} \sigma(T_t)$$

para $L > 0$. Para finalizar, se utiliza el método numérico de cuadratura de Gauss para encontrar los valores de $A_{(n)}$, $B_{(n)}$, $C_{(n)}$, $E(T_t)$, $\sigma(T_t)$ y Z_0 en diferentes tamaños de muestra n .

Otros esquemas propuestos para monitorear la dispersión en la *EWMA* son por ejemplo, la carta *EWMA* para el parámetro de forma Weibull propuesto por Pascual (2010) en donde utiliza el logaritmo de las muestras y el estimador insesgado $\frac{1}{\beta}$ para encontrar la *ARL* y compararla con las cartas de dispersión existentes.

3. Cartas de control Shewhart para el coeficiente de variación

Sean X_1, X_2, \dots, X_t una muestra aleatoria de una variable aleatoria X , que tiene distribución normal truncada en cero, con media $\mu > 0$ y desviación estándar σ . Entonces el coeficiente de variación poblacional de X se define como:

$$\gamma = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \mu > 0$$

y el coeficiente de variación muestral es dado por:

$$W_t = \frac{S_t}{\bar{X}_t}, \quad t = 1, 2, \dots$$

donde, \bar{X}_t y S_t son la media y la desviación muestral respectivamente.

Uno de los autores que inicia el estudio de la función de distribución del coeficiente de variación es Mckay (1932), quien aproxima esta función a una distribución χ_{n-1}^2 y la extiende a la función de distribución t , usando expansiones de series convergentes y cantidades pivótiles aproximadas, el autor concluye que estas aproximaciones solo deben usarse para casos donde el coeficiente de variación poblacional sea menor al 33% ($\gamma < 0,33$) y se calculan mediante paquetes estadísticos comunes cuando el tamaño de muestra es suficientemente grande ($n \gg 30$).

Posteriormente Hendrick y Robey (1936) encuentran la función de densidad para el coeficiente de variación W , la cual tiene la siguiente forma:

$$f(v) = k(v) \left[\int_{r=0}^{\infty} r^{n-1} \exp[-(ar - b(v))] dr \right]$$

donde, $a = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sigma 2^{\frac{1}{2}}}$, $b(v) = a\mu \cos(v)$, $v = \arctan(w)$ y $k(v) = n^{\frac{n}{2}} \frac{\sin^{n-2}(v) \exp\left(-n\mu^2 \frac{\sin^2(v)}{2\sigma^2}\right)}{2^{\frac{n}{2}-1} \sigma^n \sqrt{n} \Gamma\left\{\frac{[n-1]}{2}\right\}}$. El principal inconveniente de esta función de distribución es que proporciona aproximaciones precisas para valores pequeños de γ , pero no para valores grandes de la misma.

Iglewicz (1967) observó que:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}}{S} = \sqrt{n} W^{-1}$$

tiene una distribución t no central con $(n - 1)$ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\frac{\sqrt{n}}{\gamma}$ y utiliza este hecho para encontrar la función de distribución del coeficiente de variación, la cual se expresa como:

$$f(\gamma_n) = \begin{cases} f_1(\gamma_n) & \text{si } \gamma_n \geq 0 \\ f_2(\gamma_n) & \text{si } \gamma_n < 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

donde,

$$f_1(\gamma_n) = \frac{A}{(1 + \gamma_n^2)^{n/2}} I_{n-1} \left(\frac{\delta}{(1 + \gamma_n^2)^{1/2}} \right)$$

y

$$f_2(\gamma_n) = \frac{(-1)^n A}{(1 + \gamma_n^2)^{n/2}} I_{n-1} \left(\frac{\delta}{(1 + \gamma_n^2)^{1/2}} \right)$$

en las cuales,

$$\gamma_n = \frac{S_n}{\bar{x}}, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad A = \frac{\gamma_n^{n-2} e^{\left(-\frac{\delta^2 \gamma_n^2}{2(1+\gamma_n^2)}\right)}}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}}, \quad \delta = \frac{\sqrt{n}}{\gamma} \text{ y } n \geq 2.$$

Siendo I_{n-1} la función de Airy, Γ la función Gamma, con $I_{n-1}(b) = \int_0^\infty z^{n-1} e^{-\frac{1}{2}(z-b)^2} dz$, sin embargo, el autor se encuentra con la dificultad de que los momentos de esta distribución son infinitos, debido que la función de la distribución normal es siempre positiva para valores cercanos a cero, así que utiliza aproximaciones para encontrar los cuantiles, los tests e intervalos de confianza para esta distribución.

Reh y Scheffler (1996), en su estudio de la distribución para el coeficiente de variación soluciona el problema de momentos infinitos, tomando un conjunto de variables aleatorias con distribución normal truncada unilateralmente en cero X_1, X_2, \dots, X_n , $i = 1, 2, \dots, n$, de tal forma que $P(\gamma < 0) \approx 0$, lo cual origina que los momentos de esta distribución existan, aproximando la media y la varianza por ecuaciones que dependen solo del tamaño de muestra n y el coeficiente de variación, las cuales se expresan como:

$$E(W) = \gamma \left[1 + \frac{1}{n} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{n^2} \left(3\gamma^4 - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{7}{32} \right) \right] + \frac{\gamma}{n^3} \left[15\gamma^6 - \frac{3\gamma^4}{4} - \frac{7\gamma^2}{32} - \frac{19}{128} \right] \quad (3-2)$$

$$Var(W) = \gamma^2 \left[\frac{1}{n} \left(\gamma^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \left(8\gamma^4 + \gamma^2 + \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{n^3} \left(69\gamma^6 + \frac{7}{2}\gamma^4 + \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{3}{16} \right) \right] \quad (3-3)$$

y se utilizan para desarrollar test de significancia e intervalos de confianza para el coeficiente de variación, analizando así, las propiedades de esta distribución.

Por otra parte Hawkins et al. (2007) obtienen una forma canónica para la función de distribución del coeficiente de variación ($C(\gamma, m)$), partiendo de variables aleatorias independientes V y Y , con $Y \sim N(\gamma^{-1}, 1)$ y $mV \sim \chi_m^2$, realizando la transformación $U = \frac{V}{Y}$, obtienen la función de densidad para esta transformación, la cual expresan como:

$$f_1(u) = \frac{A(u)}{(1+u^2)^{\frac{m+1}{2}}} I_m \left(\frac{1}{\gamma(1+u^2)^{0,5}} \right) \quad \text{si } u \geq 0 \quad (3-4)$$

$$f_2(u) = \frac{(-1)^{m-1} A(u)}{(1+u^2)^{\frac{m+1}{2}}} I_m \left(\frac{1}{\gamma(1+u^2)^{0,5}} \right) \quad \text{si } u < 0 \quad (3-5)$$

donde,

$$A(u) = \frac{u^{m+1} \exp\left(-\frac{u^2}{2\gamma^2(1+u^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{(m-2)}{2}}}$$

y

$$I_m(b) = \int_0^\infty q^m \exp\left[-\frac{1}{2}(q-b)^2\right] dq.$$

Posteriormente, los autores consideran el caso en el que la desviación estándar σ es proporcional a la media μ de un conjunto de muestras aleatorias distribuidas normalmente de tamaño n , esto es $\sigma = \gamma\mu$, entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{(\gamma\mu)^2}{n}\right)$ y $S \sim \gamma\mu \frac{\chi_m}{\sqrt{m}}$, lo que origina que el coeficiente de variación muestral $W = \sqrt{n} \left(\frac{V}{Y}\right)$ sea \sqrt{n} veces la variable canónica $C\left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}, n-1\right)$.

Luego, basándose en la función de distribución canónica para el coeficiente de variación ($C(\gamma, m)$), diseñan la carta de control Shewhart para el coeficiente de variación (*Shewhart-CV*); en la Fase I de este esquema asumen que conocen el estimador γ , lo escogen como límite de control central o valor objetivo de los datos, el cual calculan como la raíz cuadrada de la media ponderada de los coeficientes de variación muestrales W_i , esto es:

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{\sum_i (n_i - 1) W_i^2}{\sum_i (n_i - 1)}}, \quad (3-6)$$

pues con esta estimación solucionan el problema de momentos infinitos de la función de distribución; una vez seleccionado el valor objetivo proceden a calcular los límites de control superior e inferior usando límites de control probabilísticos, ya que la distribución canónica acumulada del coeficiente de variación esta bien definida en cualquier lugar y esto facilita el cálculo de los mismos, la probabilidad de exceder los límites es de $\frac{1}{740}$ cuando el proceso esta bajo control Hawkins et al. (2007), p.154. Una vez se considere que la variabilidad en el proceso se debe solo a causas aleatorias termina la Fase I para esta carta y se pasa a la Fase II, que consiste en monitorear en línea muestras de coeficientes de variación; el proceso se considera fuera de control cuando alguna de las muestras excede los límites de control

probabilísticos, en este caso, se dice que hay un cambio en el coeficiente de variación del proceso.

Los autores concluyen que la carta para el coeficiente de variación es efectiva para detectar cambios grandes en los parámetros del proceso (γ) cuando la media y la varianza son directamente proporcionales (es decir no constantes).

4. Carta de control EWMA para monitorear γ

4.1. Planteamiento del estadístico de control y límites de control

Sean X_1, X_2, \dots, X_t una muestra aleatoria de una variable aleatoria X , que tiene distribución normal truncada en cero, con media $\mu > 0$ y desviación estándar σ proporcional a la media: $\sigma = \gamma\mu$. Entonces el coeficiente de variación muestral para el grupo t se define como:

$$W_t = \frac{S_t}{\bar{X}_t}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4-1)$$

donde, \bar{X}_t y S_t son la media y la desviación muestral respectivamente.

La propuesta desarrollada en este trabajo, es calcular la estadística *EWMA* con los valores del coeficiente de variación del t -ésimo subgrupo (W_t), siendo $S_t = \bar{X}_t W_t$, siguiendo la metodología propuesta por Hawkins et al. (2007), utilizando la aproximación del segundo momento de la función de coeficiente de variación hecha por Reh y Scheffler (1996) para calcular la desviación estándar de la carta *EWMA* y sus límites de control superior e inferior. Bajo el supuesto de normalidad para un proceso univariado iniciado en Fase II, se define el valor del estadístico de control como:

$$Z_t = \lambda W_t + (1 - \lambda) Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4-2)$$

donde, $0 < \lambda \leq 1$ es la constante de suavizamiento y $Z_0 = W_0$ es el valor objetivo. Los límites de control superior e inferior propuestos son:

$$UCL = W_0 + L\sigma_W \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \quad (4-3)$$

$$LCL = W_0 - L\sigma_W \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \quad (4-4)$$

siendo, L una constante positiva y σ_W definida como la raíz cuadrada de la ecuación (3-3). La estadística Z_t es comparada con los límites de control. El valor de L se encuentra por

medio de simulaciones en el software **R** fijando valores de λ para el ARL deseado (en este caso $ARL = 370$). El proceso es considerado fuera de control debido a causas no aleatorias si la estadística toma un valor mayor al límite de control superior o menor al límite de control inferior, en cualquiera de los dos casos se asume que hay un cambio en el coeficiente de variación del proceso.

La Tabla(4-1) muestra los valores de L que garantizan una ARL de 370 para diferentes γ , n y $\lambda = 0,2$, estos valores fueron calculados por simulación utilizando el programa estadístico **R** y realizando 20.000 replicaciones. Este procedimiento se realizó también para $\lambda = 0,1$ y $0,5$ y $n = 5, 10, y 15$ (ver anexo Tablas(A-2) y (A-3)).

Para encontrar valores de L correspondientes a valores de γ diferentes a los listados en la Tabla(4-1), se interpola el valor de L , fijando el tamaño de muestra n ; por ejemplo para $\gamma = 0,25$, $\lambda = 0,2$ y $n = 5$, se tiene

$$L = \frac{2,912 + 2,8763}{2} = 2,89415$$

γ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
0.05	2.9743	2.92	2.89861
0.06	2.972295	2.916845	2.897599
0.07	2.971	2.914	2.89648
0.08	2.97	2.91241	2.8952
0.10	2.9608	2.9099	2.893
0.20	2.912	2.8859	2.87487
0.30	2.8763	2.86203	2.864

Tabla 4-1.: Valores de L para $ARL_0 = 370$

La Tabla(4-2), proporciona algunos límites de control de la carta EWMA para el Coeficiente de Variación, en valores seleccionados de λ , γ , y n ; la probabilidad de exceder estos límites es de $\frac{1}{740}$ en cada lado cuando el proceso está bajo control. Para encontrar límites de control con valores de γ diferentes a los listados en esta tabla se interpola el valor de L en la Tabla(4-1) y se utilizan las ecuaciones (4-3) y (4-4). Este procedimiento se realizó para $\lambda = 0,1$ y $0,5$ y $n = 5, 10, y 15$ (ver anexo Tablas(A-4) y (A-5)); por ejemplo para $\gamma = 0,25$, $\lambda = 0,2$ y

$n = 5$, se tiene:

$$LCL = 0,25 - 2,89415 (0,09129935) \sqrt{\frac{0,25}{(2 - 0,25)}} = 0,161922$$

$$LC = 0,25$$

y

$$UCL = 0,25 + 2,89415 (0,09129935) \sqrt{\frac{0,25}{(2 - 0,25)}} = 0,09129935.$$

	$n = 5$		$n = 10$		$n = 15$	
γ	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
0.05	0.03303539	0.06696461	0.03866841	0.06133159	0.04093182	0.05906818
0.06	0.0396325	0.0803675	0.04640146	0.07359854	0.04910983	0.07089017
0.07	0.04621555	0.09378445	0.05412939	0.8587061	0.05728297	0.08271703
0.08	0.05281116	0.1071888	0.0618442	0.0981558	0.06545062	0.09454938
0.10	0.06595504	0.1340450	0.07724122	0.1227588	0.08176095	0.1182391
0.20	0.1308351	0.2691649	0.1534641	0.2465359	0.1626543	0.2373457
0.30	0.1916657	0.4083343	0.2272393	0.3727607	0.2414546	0.3585454

Tabla 4-2.: Límites de control para combinaciones de γ , n y $\lambda = 0,2$.

4.2. Comparación y simulación

Con el objetivo de evaluar la sensibilidad del esquema propuesto (carta *EWMA* para el Coeficiente de Variación (*EWMA-CV*)), se compara esta carta con el esquema de control Shewhart de Hawkins et al. (2007), ambas diseñadas para una *ARL* en control de 370, con tamaños de muestra 5, 10 y 15 e introduciendo incrementos (δ) en el coeficiente de variación del 25 %, 35 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 % y 100 %. Se selecciona la constante de suavizado $\lambda = 0,2$ y el valor de la constante L fue ajustado de tal forma que la longitud promedio de corrida para la carta propuesta fuera la deseada.

Se considera que existen pequeños cambios en el coeficiente de variación cuando δ se encuentra entre el 0 % y 39 %, medianos cambios cuando δ está entre 40 % y 49 % y grandes cuando δ toma valores 50 % y 100 %.

4.2.1. Subgrupo de tamaño $n = 5$

Para obtener una ARL de 370 se ajustaron los valores de la constante L que garantiza este valor promedio de longitud de corrida, de tal manera que los límites de control superior e inferior de la carta *Shewhart-CV* fueron obtenidos de la Tabla 1 de Hawkins et al. (2007) y los de la carta *EWMA-CV* se tomaron de la Tabla(4-2) de este trabajo; posteriormente se realizaron incrementos (δ) en el coeficiente de variación del proceso γ , obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla(4-3).

Shewhart-CV				EWMA-CV		
$n = 5$				$n = 5$		
δ (%)	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,10$	$\gamma = 0,15$	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,10$	$\gamma = 0,15$
0	370.00	371.00	370.00	369.77	369.70	369.50
25	43.57	43.33	42.78	26.88	25.88	24.93
35	22.49	22.46	22.35	14.31	13.93	13.65
40	17.11	17.07	17.06	11.49	11.21	11.09
50	10.69	10.76	10.82	8.23	8.08	7.98
60	7.30	7.40	7.47	6.46	6.40	6.31
70	5.37	5.47	5.52	5.39	5.31	5.25
80	4.18	4.27	4.32	4.63	4.55	4.52
100	2.89	2.93	3.01	3.64	3.58	3.57

Tabla 4-3.: Comparación Shewhart-CV y EWMA-CV para $n = 5$

Como se puede apreciar en la Tabla(4-3), la *EWMA-CV* es más sensible a pequeños y medianos cambios o incrementos en el coeficiente de variación que la carta *Shewhart CV*, además, también se puede observar la superioridad de la carta propuesta en cambios grandes entre el 50% y 60% (exceptuando cambios entre 70% y 100%). Observe que para un incremento en el coeficiente de variación del 40%, la carta propuesta detecta una señal fuera de control en 11.49, 11.21 y 11.09 corridas; mientras que la carta *Shewhart CV* las detecta en 17.11, 17.07 y 17.06 corridas, para valores de γ iguales a 0.05, 0.10 y 0.15 respectivamente.

4.2.2. Subgrupo de tamaño $n = 10$

Para obtener una ARL de 370 con este tamaño de muestra, los límites de control superior e inferior para cada una de las cartas fueron obtenidos de la Tabla 1 de Hawkins et al. (2007)

y Tabla(4-2) respectivamente, posteriormente se realizaron incrementos (δ) en el coeficiente de variación del proceso (γ) para medir la sensibilidad de las cartas, los resultados pueden ser observados en la Tabla(4-4).

Shewhart-CV				EWMA-CV		
$n = 10$				$n = 10$		
δ (%)	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,15$	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,10$	$\gamma = 0,15$
0	371.00	371.00	371.00	370.81	369.20	369.79
25	22.63	23.01	23.10	11.56	11.50	11.47
35	10.62	10.86	10.90	7.12	7.12	7.14
40	7.75	7.94	8.05	6.05	6.04	6.06
50	4.75	4.87	4.95	4.71	4.71	4.70
60	3.29	3.37	3.46	3.88	3.88	3.89
70	2.51	2.56	2.62	3.32	3.31	3.31
80	2.02	2.06	2.11	2.88	2.87	2.88
100	1.52	1.55	1.60	2.24	2.24	2.25

Tabla 4-4.: Comparación Shewhart-CV y EWMA-CV para $n = 10$

Como muestran las Tablas(4-3) y (4-4), el incremento en el tamaño del subgrupo aumenta la sensibilidad de la carta propuesta, observe que para un incremento en el coeficiente de variación del 40 %, la EWMA-CV para $n = 10$ detecta más rápidamente los cambios en el coeficiente de variación muestral del proceso, que esta misma carta pero con tamaño de muestra $n = 5$, este comportamiento persiste a medida que aumenta el tamaño de los subgrupos.

Observe que para un incremento en el coeficiente de variación del 35 %, la carta propuesta detecta una señal fuera de control en 7.12, 7.12 y 7.14 corridas, mientras que la carta *CV* las detecta estas señales en 10.62, 10.86 y 10.90 corridas, para valores de γ iguales a 0.05, 0.10 y 0.15 respectivamente. Nuevamente la carta *EWMA-CV* es superior a la carta de control *Shewhart-CV* en la detección de pequeños y medianos cambios en el coeficiente de variación muestral del proceso.

4.2.3. Subgrupo de tamaño $n = 15$

En la Tabla(4-5) se observa el aumento en la sensibilidad de la carta *EWMA-CV* cuando se aumenta el tamaño de muestra, además se aprecia claramente que la sensibilidad del nuevo esquema en la detección de pequeños y medianos cambios en el coeficiente de variación se mantiene frente a la carta de control Shewhart presentada en Hawkins et al. (2007).

Shewhart-CV				EWMA-CV		
$n = 15$				$n = 15$		
δ (%)	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,15$	$\gamma = 0,05$	$\gamma = 0,10$	$\gamma = 0,15$
0	370.0	370.0	370.0	370.35	370.41	369.15
25	14.80	15.15	15.21	8.20	8.05	8.06
35	6.60	6.76	6.90	5.43	5.36	5.36
40	4.82	4.95	5.04	4.69	4.64	4.65
50	3.02	3.10	3.17	3.75	3.71	3.7
60	2.15	2.19	2.25	3.11	3.07	3.08
70	1.69	1.71	1.78	2.63	2.59	2.60
80	1.44	1.47	1.50	2.25	2.21	2.23
100	1.19	1.20	1.23	1.69	1.68	1.70

Tabla 4-5.: Comparación Shewhart-CV y EWMA-CV para $n = 15$

4.3. Ejemplo

La siguiente información es tomada de Hawkins et al. (2007), para realizar control (Fase II) del proceso y consiste en estudiar el nivel de droga Cyclosporine en mililitros (ml) que debe tener un paciente en la sangre después de haberle trasplantado un órgano, pues demasiada droga en la sangre debilita el sistema inmunológico y ocasiona graves infecciones, pero pocos niveles de esta pueden conducir al rechazo del órgano trasplantado.

La experiencia ha demostrado que la medición de la desviación estándar en los niveles de droga que presenta el paciente cuando le son tomadas las muestras es aproximadamente proporcional a la media de las mismas, lo que origina un coeficiente de variación muestral W constante. Para demostrar este supuesto Hawkins et al. (2007) (ver figura 1, página 25) realizan una gráfica de W contra la media muestral y en ella observan que el coeficiente de variación muestral tiene tendencia constante, luego realizan un test de regresión (ver Tabla 2 en Hawkins et al. (2007)) de dependencia entre el coeficiente de variación muestral W y la media, el cual confirma que no existe dependencia entre W y la media muestral. Por tal razón tiene sentido utilizar carta de control para el coeficiente de variación CV y carta EWMA-CV para monitorear este proceso.

Se recogieron 105 muestras ($m = 105$) de tamaño 5 ($n = 5$), suministradas por el laboratorio Diasorin Inc, presentadas parcialmente en la Tabla (4-6) y bajo un proceso en Fase

II, se tiene que el valor objetivo de acuerdo con Hawkins et al. (2007) es:

$$Z_0 = W_0 = 0,075$$

y los límites de control son calculados utilizando las ecuaciones (4-3) y (4-4) e interpolando a L con dos valores consecutivos para el mismo tamaño de muestra en la Tabla(4-1) así:

$$L = \frac{2.971 + 2.97}{2} = 2.9705$$

$$LCL = 0,075 - 2.9705 (0.02575187) \sqrt{\frac{0,2}{(2 - 0,2)}} = 0.04950136.$$

Número de			Número de		
muestra	Media	W (%)	Muestra	Media	W (%)
1	34.1	25.9	19	246.6	5.0
2	57.8	16.5	20	248.2	11.1
3	58.6	18.0	21	295.5	8.3
4	66.2	17.7	22	320.3	10.0
5	70.0	11.8	23	387.1	9.2
6	79.9	6.3	24	375.0	18.7
7	90.5	16.5	25	394.4	9.3
8	85.4	12.2	26	468.1	10.0
9	109.5	13.6	27	445.3	14.3
10	112.2	5.6	28	543.3	9.9
11	121.7	11.1	29	573.3	7.1
12	124.5	6.2	30	592.2	11.4
13	162.7	16.6	31	671.2	14.3
14	150.6	3.5	32	791.0	6.7
15	175.1	17.8	33	752.5	4.2
16	202.9	13.7	34	871.6	11.9
17	199.9	12.8	35	1101.3	12.4
18	207.7	8.5			

Tabla 4-6.: Cantidad de droga Cyclosporine en la sangre.

y

$$UCL = 0,075 + 2.9705 (0.02575187) \sqrt{\frac{0,2}{(2 - 0,2)}} = 0.1004986.$$

Las Figuras(4-1) y (4-2) muestran el monitoreo del coeficiente de variación para el nivel de droga Cyclosporine en la sangre de pacientes con trasplantes de órganos, mediante la carta de control Shewhart-*CV* y la carta *EWMA-CV* respectivamente.

Como se puede observar, ambas figuras muestran un proceso fuera de control, lo que indica, que hay una gran variabilidad en los ensayos de laboratorio. Cabe notar, que la carta de control Shewhart-*CV* señala un proceso fuera de control desde el inicio del proceso, lo cual es corroborado por la carta propuesta *EWMA-CV*, pues este esquema se diseñó para detectar pequeños cambios (del 0% al 39%) en el coeficiente de variación del proceso, es por esto que, en esta carta el coeficiente de variación, aumenta rápidamente con el tiempo, tanto que, son pocas las observaciones que están dentro de los límites de control.

Lo anterior muestra claramente que bajo las condiciones de simulación planteadas la carta *EWMA-CV* es más sensible a pequeños cambios en el coeficiente de variación del proceso, además dada la naturaleza de los datos y los resultados de las cartas de control se sospecha que el laboratorio tuvo problemas de medición y calibración al momento de recolectar las muestras.

A manera de ejemplo se supone que se detuvo el proceso y una inspección exhaustiva arrojó como resultado que las observaciones 1, 2, 3, 4 y 7 en las Figuras (4-1) y (4-2) se encuentran fuera de control debido a la falta de calibración en el instrumento que tomaba las muestras de sangre en los pacientes trasplantados, por tal razón, estas son retiradas del proceso y las cartas de control son graficadas nuevamente arrojando las figuras (4-3) y (4-4). Estas nuevas graficas continúan señalando un proceso fuera de control, que inicia en la muestra número 8.

Así mismo, en las Figuras(4-3) y (4-4) se evidencia una tendencia creciente en el coeficiente de variación del proceso, siendo este más notable en la carta *EWMA-CV* lo cual evidencia su alta sensibilidad para cambios pequeños en un proceso.

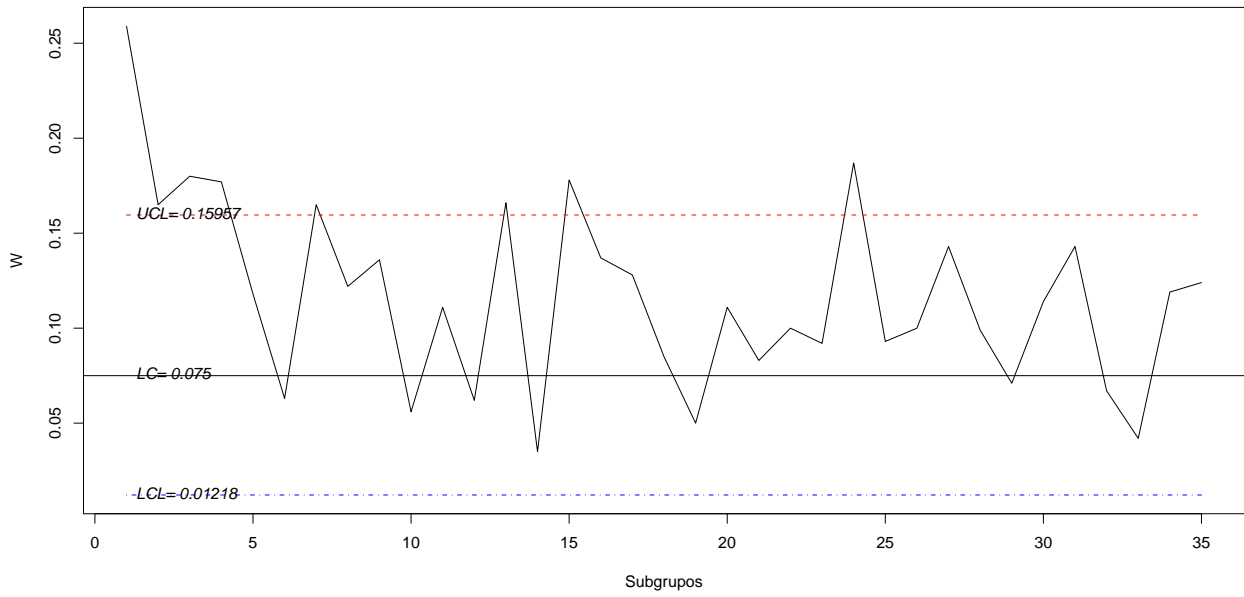


Figura 4-1.: Carta de control *Shewhart-CV* aplicada al producto Cyclosporine

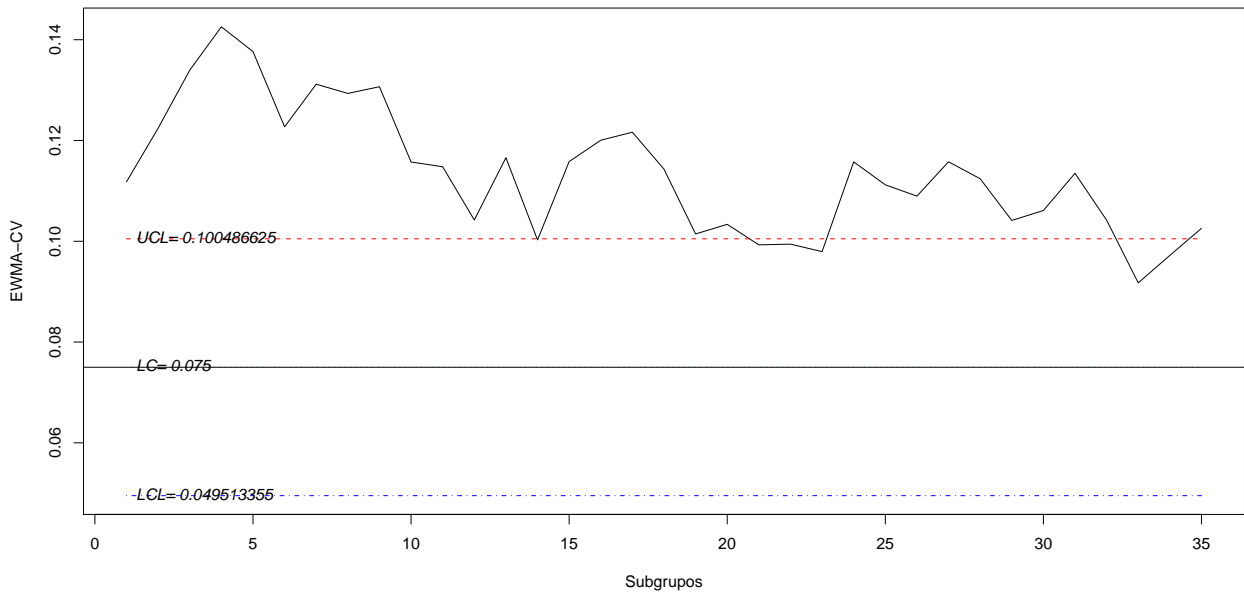


Figura 4-2.: Carta de control *EWMA-CV* aplicada al producto Cyclosporine

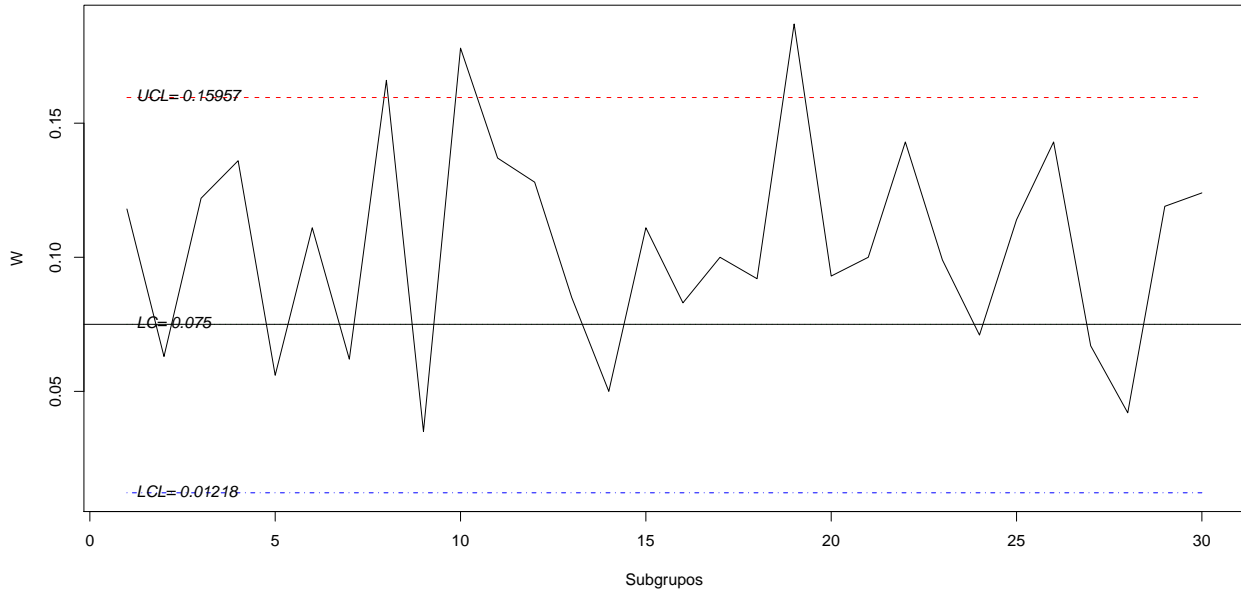


Figura 4-3.: Carta de control *Shewhart-CV* aplicada al producto Cyclosporine después de eliminar las muestras 1, 2, 3, 4 y 7

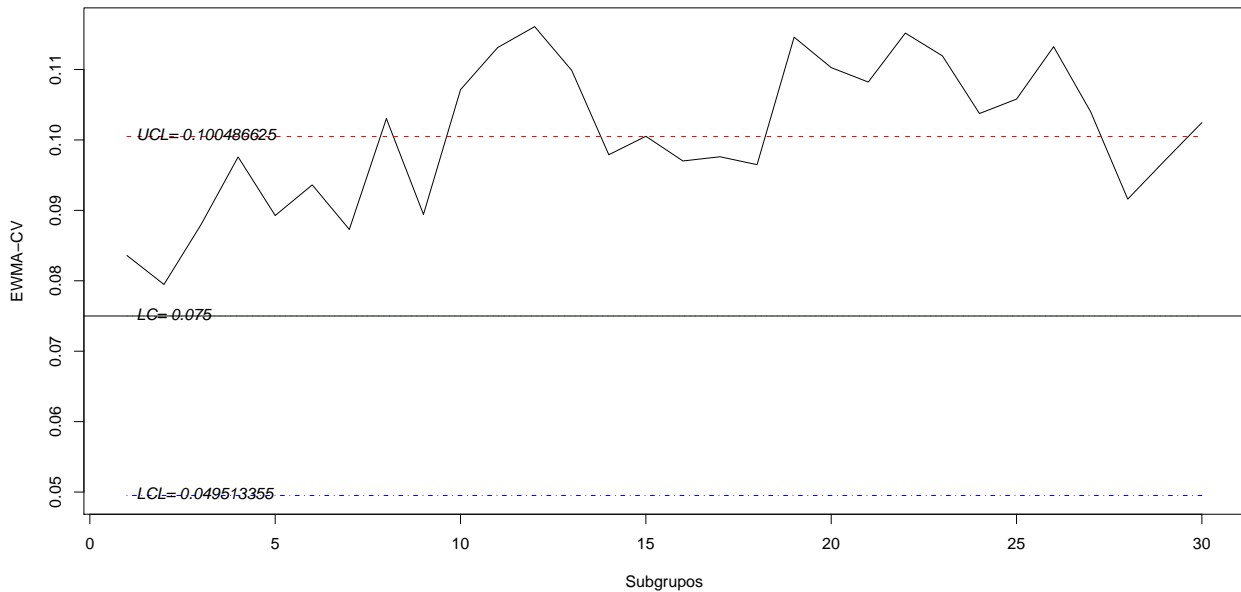


Figura 4-4.: Carta de control *EWMA-CV* aplicada al producto Cyclosporine después de eliminar las muestras 1, 2, 3, 4 y 7

5. Conclusiones, Recomendaciones y Trabajo futuro

5.1. Conclusiones

1. En la *EWMA-CV* al igual que en carta *Shewhart-CV*, la sensibilidad de la carta depende fuertemente del tamaño del subgrupo n y no depende mucho de coeficiente de variación en control γ , como era de esperarse según lo encontrado en Hawkins et al. (2007).
2. Los resultados obtenidos muestran que la carta *EWMA-CV* es más sensible a pequeños y medianos incrementos en el coeficiente de variación que la carta de control Shewhart CV propuesta por Hawkins et al. (2007).
3. Los límites de control y los parámetros de la carta propuesta son fáciles de calcular, puesto que se obtienen a través de ecuaciones que solo dependen del tamaño de muestra.
4. La sensibilidad de la carta *EWMA-CV* mejora con el aumento en el tamaño del subgrupo n al igual que la carta *Shewhart-CV*.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda utilizar cartas de control EWMA-CV en procesos donde la media y la varianza no son constantes y se está interesado en detectar pequeños y medianos cambios en el coeficiente de variación W .

A. Anexo: Algoritmo

A continuación se presentan los programas y gráficos utilizados.

A.1. Tablas y gráficas para el ejemplo de la carta R

Muestra i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_i	Muestra i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_i
1	205	202	204	207	205	5	19	207	206	194	197	201	13
2	202	196	201	198	202	6	20	200	204	198	199	199	6
3	201	202	199	197	196	6	21	203	200	204	199	200	5
4	205	203	196	201	197	9	22	196	203	197	201	194	9
5	199	196	201	200	195	6	23	197	199	203	200	196	7
6	203	198	192	217	196	25	24	201	197	196	199	207	11
7	202	202	198	203	202	5	25	204	196	201	199	197	8
8	197	196	196	200	204	8	26	206	206	199	200	203	7
9	199	200	204	196	202	8	27	204	203	199	199	197	7
10	202	196	204	195	197	9	28	199	201	201	194	200	7
11	205	204	202	208	205	6	29	201	196	197	204	200	8
12	200	201	199	200	201	2	30	203	206	201	196	201	10
13	205	196	201	197	198	9	31	203	197	199	197	201	6
14	202	199	200	198	200	4	32	197	194	199	200	199	6
15	200	200	201	205	201	4	33	200	201	200	197	200	4
16	201	187	209	202	200	22	34	199	199	201	201	201	2
17	202	202	204	198	203	6	35	200	204	197	197	199	7
18	201	198	204	201	201	6							

Tabla A-1.: Diámetros interiores de cilindros. Últimos 3 dígitos

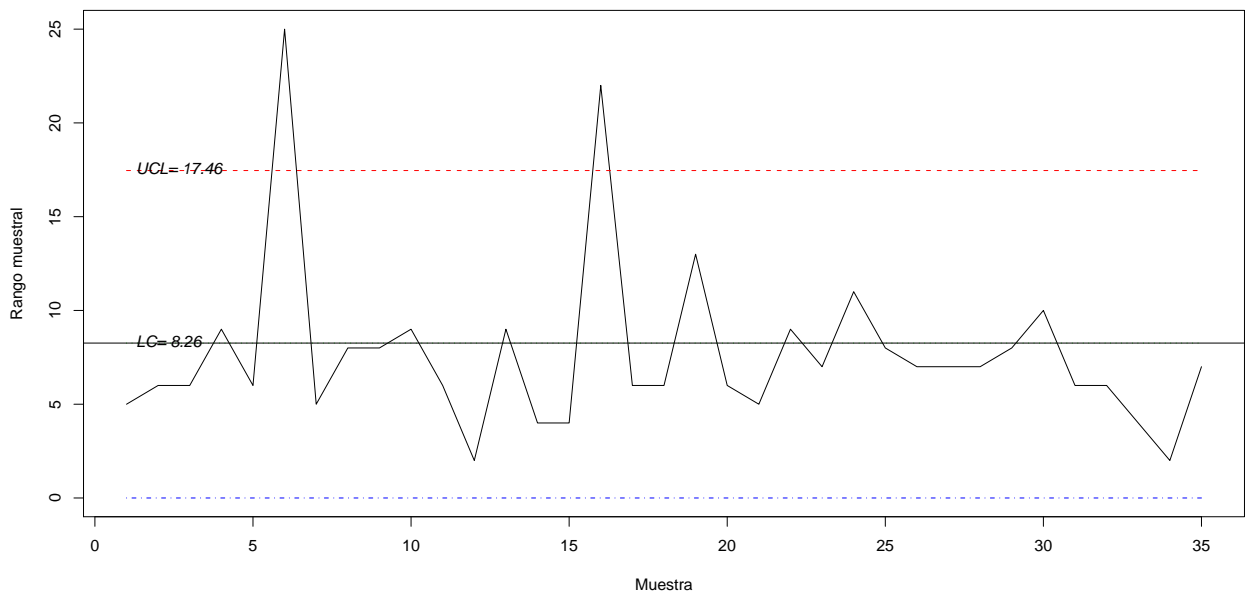


Figura A-1.: Carta de control R para los diámetros de las 35 muestra

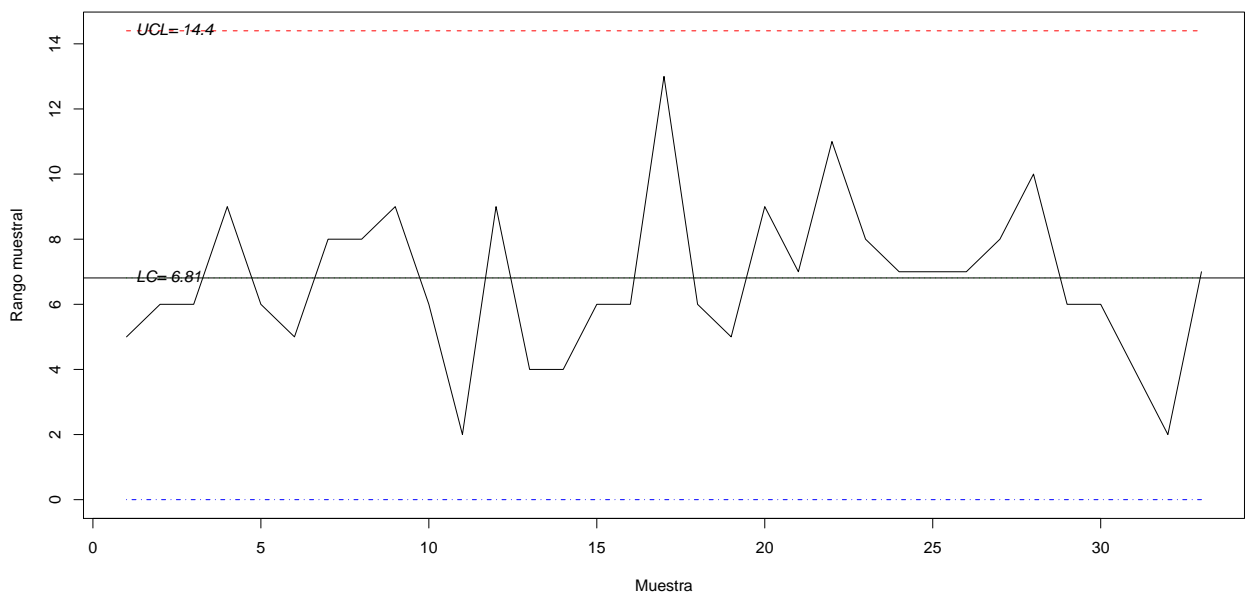


Figura A-2.: Carta de control R después de eliminar las muestras 6 y 16

A.2. Tablas para L y límites de control para diferentes valores de λ

γ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
0.05	3.054	2.88	2.823
0.06	3.0509	2.878	2.818
0.07	3.04	2.878	2.8179
0.08	3.045	2.873	2.815
0.10	3.03	2.865	2.812
0.20	2.931	2.8136	2.776
0.30	2.8144	2.7464	2.7329

Tabla A-2.: Valores de L para $\lambda = 0,1$

γ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
0.05	2.8892	2.94	2.953
0.06	2.89	2.94	2.954
0.07	2.89245	2.943	2.952
0.08	2.89385	2.9415	2.95392
0.10	2.9	2.942	2.9543
0.20	2.95	2.964	2.967
0.30	3.14047	3.0401	3.018

Tabla A-3.: Valores de L para $\lambda = 0,5$

$n = 5$			$n = 10$		$n = 15$	
γ	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
0.05	0.03801129	0.06198871	0.0423079	0.0576921	0.04392165	0.05607835
0.06	0.04561141	0.07438859	0.05076548	0.06923452	0.05271077	0.06728923
0.07	0.05325024	0.08674976	0.05921204	0.08078796	0.06148499	0.07851501
0.08	0.06079542	0.09920458	0.06767341	0.09232659	0.07026381	0.08973619
0.10	0.07602101	0.123979	0.08457803	0.115422	0.08779849	0.1122015
0.20	0.1520868	0.2479132	0.1687742	0.2312258	0.1751809	0.2248191
0.30	0.2270438	0.3729562	0.2519459	0.3480541	0.2615507	0.3384493

Tabla A-4.: Límites de control para combinaciones de γ , n y $\lambda = 0,1$

$n = 5$			$n = 10$		$n = 15$	
γ	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
0.05	0.02145715	0.07854285	0.03023868	0.06976132	0.03399873	0.6600127
0.06	0.0256992	0.0943008	0.03625966	0.8374034	0.04077053	0.07922947
0.07	0.02989329	0.1101067	0.04223773	0.09776227	0.04755126	0.09244874
0.08	0.03406860	0.1259314	0.04823914	0.1117609	0.05428862	0.1057114
0.10	0.0422433	0.1577567	0.06014579	0.1398542	0.06773965	0.1322603
0.20	0.07863955	0.3213604	0.1172161	0.2827839	0.1332425	0.2667575
0.30	0.09512588	0.5048741	0.1661337	0.4338663	0.1931438	0.4068562

Tabla A-5.: Límites de control para combinaciones de γ , n y $\lambda = 0,5$

A.3. Programas para calcular las ARL's

```
#####
# ARL's para la carta de control Shewhart-CV
#####
set.seed(1)
n=5
miu=3
cv=0.05
sigma=miu*cv
```



```

delta=0.0
UCL=0.10587          # Valor de UCL que garantiza un ARL de 370
LCL=0.00812         # Valor de LCL que garantiza un ARL de 370
rl=c()
j=1

          # Inicio de las replicaciones
for (j in 1:40000)
{
x=rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
cvo=sd(x)/mean(x)
RL=0
cf=cvo

          # No hay señal fuera de control
while ((LCL<cf)&(cf<UCL))          # Inicio del while
{
RL=RL + 1
x=rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
cf=sd(x)/mean(x)
}          # Fin del while

          # Hay señal fuera de control

rl[j]=RL+1
}          # Fin del for

ARL=mean(rl)          # Promedio de los RL's
ARL          # Valor de la longitud promedio de corrida

#####
# ARL's para la carta de control EWMA-CV
#####
set.seed(1)
n=5
miu=3
cv=0.05
lamd=0.2
L=2.9743          # Valor de L que garantiza ARL de 370

```

```

sigma=miu*cv
delta=0.0

# Cálculo de los limites de control
p=cv^2*((1/n)*(cv^2+0.5)+(1/n^2)*(8*cv^4+cv^2+3/8)+(1/n^3)
  *(69*cv^6+(7/2)*cv^4+(3/4)*cv^2+3/16))
UCLev=cv+L*sqrt(p)*sqrt(lamd/(2-lamd))
LCLev=cv-L*sqrt(p)*sqrt(lamd/(2-lamd))
j=1
RLew=c()
j=1

      # Inicio de las replicaciones
for (j in 1:20000)
{
x=rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
cvo=sd(x)/mean(x)
z0=cv
z=z0*(1-lamd)+lamd*cvo
RL=0

      # No hay señal fuera de control
while ((LCLev<z)&(z<UCLev))          # Inicio del While
{
RL=RL + 1
x=rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
cvo=sd(x)/mean(x)
z=z0*(1-lamd)+lamd*cvo
z0=z
}                                     # Fin del while

                                     # Hay señal fuera de control
RLew[j]=RL+1
}                                     # Fin del for
ARLew=mean(RLew);                    # Promedio de los RL's
ARLew                                 # Valor de la longitud promedio de corrida

```

A.4. Programas para las gráficas de la carta CV y la EWMA-CV

```
#####
# Gráfica del la carta de control Shewhart-CV
#####
y1<-c(0.259,0.165,0.180,0.177,0.118,0.063,0.165,0.122,0.136,0.056,0.111,
      0.062,0.166,0.035,0.178,0.137,0.128,0.085,0.050,0.111,0.083,0.100,
      0.092,0.187,0.093,0.10,0.143,0.099,0.071,0.114,0.143,0.067,0.042,0.119,
      0.124)
y2<-c(0.15957)
y3<-c(0.07500)
y4<-c(0.01218)
x<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,
     26,27,28,29,30,31,32,33,34,35)
y<-cbind(y1,y2,y3,y4)
matplot(x,y,type="l",xlab="Subgrupos",ylab="v")
abline(h=y3)
text(y2,paste('UCL=',y2),pos=4,font=3,cex=1)
text(y3,paste('LC=',y3),pos=4,font=3,cex=1)
text(y4,paste('LCL=',y4),pos=4,font=3,cex=1)

#####
# Gráfica de la carta de control EWMA-CV
#####
y1<-c(0.1118,0.12244,0.133952,0.1425616,0.13764928,0.122719424,0.1311755392,
      0.12934043136,0.130672345088,0.1157378760704,0.11479030085632,
      0.104232240685056,0.116585792548045,0.100268634038436,0.115814907230749,
      0.120051925784599,0.121641540627679,0.114313232502143,0.101450586001715,
      0.103360468801372,0.0992883750410974,0.0994307000328779,0.0979445600263024,
      0.115755648021042,0.111204518416834,0.108963614733467,0.115770891786773,
      0.112416713429419,0.104133370743535,0.106106696594828,0.113485357275862,
      0.10418828582069,0.091750628656552,0.0972005029252416,0.102560402340193)
y2<-c(0.100486625)
y3<-c(0.07500)
y4<-c(0.049513355)
x<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,
     28,29,30,31,32,33,34,35)
y<-cbind(y1,y2,y3,y4)
matplot(x,y,type="l",xlab="Subgrupos",ylab="Z")
```

```
abline(h=y3)
text(y2,paste('UCL=',y2),pos=4,font=3,cex=1)
text(y3,paste('LC=',y3),pos=4,font=3,cex=1)
text(y4,paste('LCL=',y4),pos=4,font=3,cex=1)
```

A.5. Implementación de la carta EWMA-CV

En el diseño la carta de control *EWMA-CV* se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Seleccione la *ARL* deseada y el tamaño de muestra n para analizar los datos.
2. Fije el parámetro v_0 .
3. Use la *ARL* seleccionada en el paso 1 y el v_0 seleccionado en el paso 2, para determinar en la Tabla(4-2) los límites de control. Si el valor de v_0 no se encuentra referenciado haga uso de interpolación lineal sobre L y utilice las ecuaciones (4-3),(4-4) y la Tabla(4-1) para calcularlos directamente.
4. Proceda a calcular la estadística Z_t para cada muestra, gráfiquela contra el número de muestra t en la carta de control con los límites seleccionados en el paso 3.
5. El proceso esta fuera de control si $Z_t > UCL$ o $Z_t < LCL$, en cualquiera de estos casos se considera que hubo un cambio en el coeficiente de variación del proceso por tal razón hay que parar el proceso e inspeccionarlo, si se encuentran causas asignables la muestra debe ser retirada del proceso.

Para detectar pequeños cambios en el coeficiente de variación del proceso se recomienda utilizar valores de λ en un rango de 0.05 a 0.3.

Bibliografía

- Acosta-Mejía, C. A., Pignatiello Jr., J., and Rao, B. V. (1999). A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion. *IIE Transactions*, 31:569–579.
- Chen, G., Cheng, S., and Xie, H. (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *Journal Quality Technology*, 33:223–233.
- Hawkins, D. M., Lee, M. S., and Seong, Y. J. (2007). A control chart for the coefficient of variation. *Journal Quality Technology*, 39:151–158.
- Hendrick, W. A. and Robey, K. (1936). The sampling distribution of the coefficient of variation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 7:129–132.
- Iglewicz, B. (1967). *Some Properties of the Sample Coefficient of Variation*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute.
- Kotz, S., Johnson, N. L., and Balakrishnan, N. (1994). Continuous univariate distributions. *Journal Quality Technology*, 13:228–231.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, New York.
- Mckay, A. T. (1932). Distribution of the coefficient of variation and extended t distribution. *Journal of the Royal Statistical Society*, 95:695–699.
- Montgomery, D. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*. Wiley New York, United States.
- Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines. *Technometrics*, 5:307–315.
- Pascual, F. (2010). Ewma charts for the Weibull shape parameter. *Journal Quality Technology*, 42(4):400–416.
- Philippe, C. (2005). A new $S^2 - EWMA$ control chart for monitoring the process variance. *Quality and Reliability Engineering International*, 21:781–794.
- Reh, W. and Scheffler, B. (1996). Significance test and confidence intervals for coefficients of variation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 22:449–452.

-
- Stephen, V. C. and Hamilton, M. D. (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation. *Journal Quality Technology*, 24:12–21.
- Stuart, A. and Ord, J. K. (1994). *Kendall Advanced Theory of Statistical*, volume 1. Edward Arnol.
- Vargas, J. A. (2006). *Control Estadístico de Calidad*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.