



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

“CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
NUMÉRICA EN EL AULA DE CLASE POTENCIANDO LA
COMPETENCIA COMUNICATIVA”

CINDY CAROLINA VÁSQUEZ PULIDO

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2011

“CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
NUMÉRICA EN EL AULA DE CLASE POTENCIANDO LA
COMPETENCIA COMUNICATIVA”

CINDY CAROLINA VÁSQUEZ PULIDO

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar
el título de:

**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y
Naturales**

Directora:

(Ph.D en Matemáticas) Clara Helena Sánchez B.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Área de Formación en Ciencias
Bogotá D.C. 2011

A Dios, mis padres y todas aquellas personas que hicieron posible que cada día con su esfuerzo y dedicación me ayudaron para que este proyecto fuera posible...

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios quien me permitió diariamente tener la plena de seguridad de seguir adelante.

Hago un especial agradecimiento a la Institución Educativa Distrital Almirante Padilla, quien me brindó la oportunidad y los elementos necesarios para trabajar con los estudiantes de grado sexto y lograr aportar a la educación de estas personas en formación escolar.

RESUMEN

Este trabajo es el producto de la implementación de una propuesta didáctica aplicada con estudiantes de grado Sexto de la Institución Educativa Distrital Almirante Padilla, motivado por el reconocimiento de algunas dificultades encontradas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas básicas, se suma a lo anterior la dificultad de los alumnos de comunicar correctamente las ideas, usando el lenguaje propio de las matemáticas ya sea en forma oral, escrita, simbólica o gráfica. Para ello se basó en el desarrollo y manejo del sistema de numeración decimal. Eligiendo como estrategia de trabajo la lectura y escritura de textos relacionados con las matemáticas con el fin de que sus niveles de motivación aumenten, estipulando como proyecto la construcción del conocimiento basado en estrategias de comunicación.

Palabras clave: Educación matemática, sistemas de representación, competencia, comunicación, sistema numérico.

ABSTRACT

This work is a result of didactic implementation approach applied with sixth grade students of District School Almirante Padilla, motivated by the recognition of some difficulties encountered in the process of learning of basic math, in addition to the above the difficulty of students successfully communicate ideas using the language of mathematics either oral, written, symbolic or graphic.

This was based on the development and management of decimal system. Choosing as a working strategy of reading and writing texts related with mathematics in order to increase their levels of motivation, stipulating, as knowledge construction project based on communication strategies.

Keywords: mathematics education, systems of representation, competence, communication, number system.

CONTENIDO

Resumen.....	III
Abstract.....	IV
INTRODUCCIÓN.....	1
1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DIDÁCTICO.....	2
2. ELEMENTOS HISTÓRICOS Y EPISTEMOLÓGICOS.....	7
2.1 ORIGEN DE LOS NÚMEROS Y DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION.....	7
2.1.1 Los números como palabras.....	7
2.2 LOS NÚMEROS NATURALES.....	8
2.2.1 Sistema de Numeración Babilonio.....	9
2.2.2 Sistema de Numeración Romano.....	11
2.2.3 Sistema de Numeración Egipcio.....	12
2.2.4 Sistema de numeración Maya.....	14
2.2.5 Sistema de Numeración Decimal.....	15
2.3 LOS SISTEMAS NUMÉRICOS Y EL LENGUAJE NATURAL.....	17
2.4 LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN, EL LENGUAJE Y LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS.....	19
2.4.1 Comunicación antes de la actividad.....	22
2.4.2 Comunicación durante la actividad.....	22
2.4.3 Comunicación posterior a la actividad.....	22
2.5 PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS.....	23
2.6 COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS Y DE LA NUMERACIÓN.....	25
2.6.1 Significados de los números.....	26
3. ELEMENTOS DISCIPLINARES DEL TÓPICO.....	28
3.1 NÚMERO.....	28
3.2 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NUMÉRICA.....	30
3.2.1 Sistemas Aditivos.....	31
3.2.2 Sistemas Posicionales.....	31
4. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA Y ANÁLISIS DE LA MISMA.....	33
4.1 SESION 1.....	38
4.2 SESIÓN 2.....	40

4.2.1 ACTIVIDAD N°1.....	40
4.2.2 ACTIVIDAD N°2.....	41
4.2.3 ACTIVIDAD N°3.....	41
4.3 SESIÓN 3: PRODUCCION DEL TEXTO ESCRITO	42
5. CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFÍA	48
ANEXOS.....	49
PRODUCCION DE TEXTOS.....	49
EVALUACION FINAL	107

INTRODUCCIÓN

Este trabajo hace referencia a la toma de conciencia sobre la importancia de la educación matemática y la competencia comunicativa en matemáticas en la escuela, ya que se recientemente diversas investigaciones han hecho el estudio sobre la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática entendida esta esencialmente como una actividad simbólica (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005).

Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensión de la comunicación en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza de la comunicación matemática (Cobb, Yackel, y McClain, 2000; Steinbring, Bartolini Bussi, y Sierpinska, 1998). Pues por medio de la expresión de ideas de este tipo se logra evidenciar claramente la concepción y el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

De la misma forma, se da continuidad a un proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en todo se relacionan por un lado, los sistemas de representación numérica, con sus implicaciones históricas y epistemológicas, y la competencia comunicativa en el aula de clase. Se llevan a cabo una serie de actividades donde estudian algunos de los productos realizados por los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Distrital Almirante Padilla.

1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DIDÁCTICO

En el inicio de la formación matemática escolar, cuando niños y niñas se incorporan a la educación básica o primaria, los sistemas de representación numérica son un elemento clave. Según Nunes Carraher y Bryant (1998), el desarrollo del conocimiento y la comprensión matemáticos implica para los niños tres aspectos: aprender las invariantes lógicas, aprender a dominar y utilizar los sistemas matemáticos convencionales y aprender a ver los requerimientos matemáticos de diferentes situaciones. Como es sabido, el Sistema de Numeración Decimal es el primer sistema matemático convencional con que se enfrentan los niños en el aula, y constituye el instrumento de mediación de otros aprendizajes matemáticos. En consecuencia a lo anterior, la calidad de los aprendizajes que los niños puedan lograr en relación con este objeto cultural es decisiva para su óptimo desarrollo en la trayectoria escolar posterior.

Según los lineamientos curriculares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, los estudiantes de grado sexto deben llegar de quinto preparados en el pensamiento numérico y sistemas numéricos en : 1) justificación del valor posicional en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades, 2) resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones, 3) resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación, 4) usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, y 5) justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

A partir de la experiencia docente se hace evidente que en la mayoría de los casos, los estudiantes al llegar a grado sexto no cumplen con lo que propone el

Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus estándares y lineamientos para matemáticas; se suma a lo anterior **la dificultad de los alumnos de comunicar correctamente las ideas, usando el lenguaje propio de las matemáticas ya sea en forma oral, escrita, simbólica o gráfica.**

Caso particular al que se refiere este trabajo, es el de los estudiantes de grado Sexto de la Institución Educativa Distrital Almirante Padilla, pues éstos, presentan serias dificultades encontradas en las matemáticas básicas, en el desarrollo y el manejo del sistema de numeración decimal; una de las causas es la poca motivación para aprenderlas. Pero se ha observado que cuando se elige como estrategia de trabajo la lectura y escritura de textos relacionados con las matemáticas sus niveles de motivación aumentan. De otra parte, esta institución educativa tiene como objetivo de Ciclo escoger un proyecto para trabajar de forma interdisciplinar con cursos agrupados según los niveles educativos de la educación básica. Por ello, se trabajó con el esquema de ciclo tres, que corresponde a los grados quinto, sexto y séptimo, como proyecto el relato, cuyo objetivo fue la construcción del conocimiento basado en estrategias de comunicación.

Consideramos que una propuesta adecuada para superar las dificultades señaladas en este contexto debería estar orientada a aportar elementos que permitan dar significado a los tópicos relacionados con los números naturales y los sistemas de numeración y sus relaciones. Para la consecución de los lineamientos y estándares que deben cumplir los estudiantes al salir de grado sexto, creemos que es necesario profundizar en los siguientes aspectos:

- Justificar la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, procurando que el estudiante maneje las propiedades del sistema de numeración decimal.

- Resolver y formular problemas utilizando propiedades básicas de la aritmética de números naturales, relacionadas con igualdad, distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Formular y resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos.

Por otro lado, uno de los grandes retos con relación a los sistemas de numeración de la enseñanza básica, es comprender y reflexionar sobre las complejidades que tiene el aprendizaje del sistema decimal para los niños y las niñas, reconociendo las propiedades, técnicas o procedimientos que permiten resolver problemas generados en este aprendizaje y los fundamentos matemáticos que los justifican. Por otra parte, algunas de las dificultades detectadas en estudios relacionados con el sistema de numeración decimal, confunden las propiedades de la escritura de números (con signos), mezclando lo posicional con lo aditivo.

La elección del objeto de estudio no es casual, pues manejar adecuadamente el sistema de numeración decimal es el elemento clave para niños y niñas que se incorporan a la formación de la educación secundaria. En cuanto objeto matemático, el sistema de numeración decimal, no es una simple representación de cantidades en forma simbólica, sino un sistema de representación de las cantidades que si es bien entendida y manejada por los niños permite un mejor entendimiento y manejo de las operaciones aritméticas y sus propiedades. La construcción de cualquier sistema de representación involucra un proceso de diferenciación de los elementos y relaciones reconocidos en el objeto a ser representado.

El problema detectado en el aula ha sido referido en investigaciones, como las presentadas y estudiadas por Godino (2004) quien en su libro *Matemáticas para Maestros* señala que la enseñanza habitual de los sistemas de numeración y de los algoritmos convencionales correspondientes a las operaciones aritméticas en los primeros grados no facilita que los alumnos comprendan las razones de los

pasos que se siguen para obtener el resultado. En efecto, los errores que cometen los niños al aplicar algoritmos o las explicaciones que brindan acerca de los procedimientos empleados, incluso cuando obtienen el resultado correcto, reiteran la dificultad de los alumnos para comprender que dichas reglas están íntimamente relacionadas con los principios de nuestro sistema de numeración.

Igualmente Lerner y Wolman (1999) afirman que *“Se reconoce así un serio problema de la enseñanza usual: la dificultad de lograr que los alumnos comprendan realmente el principio que rige la numeración escrita”*.

Cuando los niños usan la numeración escrita, van elaborando algunas *regularidades* en la organización de los números. Las elaboran cuando comparan números y establecen criterios, que les permiten comparar números con diferentes cantidades de cifras. Como el valor de una cifra no es siempre el mismo sino que está vinculado con su posición respecto a las otras que forman el número, los niños elaboran y utilizan este criterio sin saber aún las razones de este cambio de valor.

El problema enunciado que comúnmente se encuentra en los alumnos, de no comunicar correctamente las ideas, usando el lenguaje propio de la asignatura de matemáticas, se evidencia en la dificultad para la comprensión conceptual y algunas veces de procedimientos; los estudios de Jesús Murillo (2001) ponen de manifiesto que en las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos expresan ideas matemáticas, utilizar términos y notaciones matemáticas adecuadas, es parte de la resolución de un problema. Cuando los estudiantes se ven enfrentados a resolver problemas que involucran el uso y las propiedades del sistema de numeración decimal en algunos casos se ven escasos de recursos tanto metodológicos como conceptuales para poder resolverlos.

Los estudios consultados en la bibliografía coinciden en afirmar que la elaboración temprana por parte de los niños de conceptualizaciones sobre el

Sistema de Numeración Decimal, entre las cuales se destacan la construcción de criterios de comparación de números y la producción de notaciones numéricas basadas en la correspondencia con la numeración hablada facilita el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas básicas. Lerner (2005) afirma que la escritura de los nudos o números redondos constituye un punto de apoyo para la apropiación de otras notaciones, que los niños enfrentan conflictos como producto de la elaboración simultánea de reglas basadas en la posicionalidad (criterios de comparación) y en la correspondencia con la numeración hablada, y que el esfuerzo por superar estos conflictos permite avanzar hacia la escritura convencional. Además de ello es importante que los estudiantes conozcan y se apropien de algunos sistemas de numeración diferente al decimal ya sean posicionales o no, ya que esto permite que hallen relaciones y diferencias entre estos sistemas de representación numérica, con el fin de apropiarse del concepto “sistema de numeración”.

2. ELEMENTOS HISTÓRICOS Y EPISTEMOLÓGICOS

En este apartado se presentan algunas soluciones que las culturas antiguas notables le dieron al problema de contar y los sistemas de representación numéricos inventados por ellas.

2.1 ORIGEN DE LOS NÚMEROS Y DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION

2.1.1 Los números como palabras

Los niños, aun los más pequeños, pronto aprenden a señalar con su dedo los objetos que los rodean y a contarlos: uno, dos, tres... Algunos de poca edad logran contar hasta diez, y los más precoces con ayuda de sus padres quizás lleguen hasta veinte.

Pues bien, los hombres primitivos muy probablemente siguieron el mismo camino de los niños pequeños: adquirieron el concepto de contar sus pertenencias; probablemente para registrar cuantos animales poseían, hacían señales, cortes con un cuchillo, en una pared o en un árbol.

Una palabra que se asociaba con un cierto grupo de estas señales o cortezas, designaba un número. Si un hombre tenía tres ovejas, otro tenía tres camellos y otro tres hijos, ambos debían usar la misma palabra “tres”; por tanto el nombre del grupo era, y así tenía que ser para que estos se entendieran, el mismo independientemente del tipo de objetos que estuvieran contando.

Antiguamente, no había palabra ni mucho menos símbolo para el cero. Por la sencilla razón de que nadie “*cuenta*” la ausencia objetos. Muchos siglos tuvieron que transcurrir para que el cero adquiriera un lugar entre los números, y muchos más para que cada número se pudiera representar por medio de un símbolo o combinación de símbolos, en un determinado sistema de representación. Bien sabemos hoy que no hay suficientes palabras.

Para los griegos la ciencia que estudiaba los números se llamaba Aritmética; siglos después, los matemáticos empezaron a llamarla Teoría de Números, y así se encuentra hoy en los libros de texto de la enseñanza básica; por ejemplo el libro *Aritmética y Geometría* (2003) de la Editorial Santillana.

2.2 LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales tienen origen en una necesidad tan antigua como las primeras civilizaciones: la necesidad de contar. El hombre primitivo identificaba objetos con características iguales y podía distinguir entre uno y muchos; pero no le era posible captar la cantidad a simple vista. Por ello, empezó a representar las cantidades haciendo marcas en huesos, trozos de madera o piedra. Por cada objeto observado hacía una marca que le fuera familiar, así concibió la idea de número.

Para contar, también utilizó su propio cuerpo: los dedos de la mano, los de los pies, los brazos, las piernas, el torso y la cabeza, las falanges y las articulaciones.

Mucho tiempo después, hacia 3300 a.de. C., apareció la representación escrita de los números, paralelamente al nacimiento de la escritura, en Sumer (Mesopotamia). En las primeras tablillas de arcilla que han revelado la escritura,

aparecen signos específicos destinados a representar los números.

En cada cultura se empleó una forma particular de representar los números. Por ejemplo, los babilonios usaban tablillas con varias marcas en forma de cuña y los egipcios usaban jeroglíficos, que aún aparecen en las paredes y columnas de los templos. Las cifras que se usan hoy en día tienen su origen en las culturas hindú y árabe.

Con el transcurso del tiempo y el progreso de la civilización, la necesidad de representar las cantidades con símbolos se hizo evidente. Para la creación y el uso de éstos símbolos se tuvieron en cuenta ciertas normas que permitieron hacer combinaciones entre ellos. De esta manera, se asignó a cada número un símbolo y una combinación de símbolos que lo representara. Los símbolos y las normas utilizados para representar números, forman lo que hoy se conoce con el nombre de sistema de numeración o sistemas de representación numérica, entre ellos encontramos los siguientes:

2.2.1 Sistema de Numeración Babilonio

Los antiguos Sumerios construyeron una aritmética para elaborar un calendario 5700 años antes de Cristo; ellos mismos desarrollaron un sistema numérico con 60 símbolos que luego fue heredado y utilizado con mucha habilidad por los babilonios¹. Los babilonios habitaban en la antigua Mesopotamia, región que hoy corresponde a Irak.

Como en otras culturas, fueron los astrónomos babilonios quienes desarrollaron su sistema de numeración. Los 59 primeros números se representan en una forma decimal. La cuña vertical representaba la unidad, la cuña horizontal diez unidades.

¹ En la actualidad se sigue empleando el sistema sexagesimal para expresar medidas de tiempo y de ángulos

Los demás números se formaban escribiendo estos símbolos en distintas combinaciones. En el año 1700 a.C. se dieron cuenta que sus símbolos podían representar otros valores dependiendo de su posición, dando origen a la notación posicional; escribían los numerales en grupos separados por espacios, cada grupo representaba unidades, grupos de 60 unidades, grupos de $60 \times 60 = 360$ unidades, respectivamente. Finalmente, para hallar el valor representado en un número, se efectuaban las multiplicaciones correspondientes y se sumaban los productos resultantes.

1	Y	11	A Y	21	◀ Y	31	◀◀ Y	41	◀◀◀ Y	51	◀◀◀◀ Y
2	YY	12	A YY	22	◀ YY	32	◀◀ YY	42	◀◀◀ YY	52	◀◀◀◀ YY
3	YYY	13	A YYY	23	◀ YYY	33	◀◀ YYY	43	◀◀◀ YYY	53	◀◀◀◀ YYY
4	▽	14	A ▽	24	◀ ▽	34	◀◀ ▽	44	◀◀◀ ▽	54	◀◀◀◀ ▽
5	▽▽	15	A ▽▽	25	◀ ▽▽	35	◀◀ ▽▽	45	◀◀◀ ▽▽	55	◀◀◀◀ ▽▽
6	▽▽▽	16	A ▽▽▽	26	◀ ▽▽▽	36	◀◀ ▽▽▽	46	◀◀◀ ▽▽▽	56	◀◀◀◀ ▽▽▽
7	▽▽▽▽	17	A ▽▽▽▽	27	◀ ▽▽▽▽	37	◀◀ ▽▽▽▽	47	◀◀◀ ▽▽▽▽	57	◀◀◀◀ ▽▽▽▽
8	▽▽▽▽▽	18	A ▽▽▽▽▽	28	◀ ▽▽▽▽▽	38	◀◀ ▽▽▽▽▽	48	◀◀◀ ▽▽▽▽▽	58	◀◀◀◀ ▽▽▽▽▽
9	▽▽▽▽▽▽	19	A ▽▽▽▽▽▽	29	◀ ▽▽▽▽▽▽	39	◀◀ ▽▽▽▽▽▽	49	◀◀◀ ▽▽▽▽▽▽	59	◀◀◀◀ ▽▽▽▽▽▽
10	A	20	◀	30	◀◀	40	◀◀◀	50	◀◀◀◀		

ILUSTRACIÓN 1

Lo nuevo empieza con la escritura del número 60 donde se utiliza el mismo signo que para el 1, pero con un mayor intervalo entre él y los signos restantes como se observa en la ilustración 2.

$$\begin{aligned} \nabla \quad \nabla \nabla \nabla &= 1 \cdot 60 + 5 = 65, & \nabla \quad \lll \nabla \nabla \nabla &= 1 \cdot 60 + 23 = 83, \\ \nabla \nabla \nabla \quad \nabla \nabla &= 5 \cdot 60 + 2 = 302, & \lll \nabla \nabla \quad \lll \lll \nabla \nabla \nabla &= 12 \cdot 60 + 34 = 754 \end{aligned}$$

ILUSTRACIÓN 2

Un problema de este sistema de numeración es que para empezar no tenían símbolo para el cero. El símbolo de Babilonia de un sesenta y un seis son los mismos ya que a veces no se detecta con facilidad si hay espacio o no entre dos símbolos con lo cual es fácil cometer un error en su escritura o en su interpretación; sólo el contexto dentro del problema permitiría tomar una decisión.

Por otra parte, la gran ventaja del sistema de posición es que se necesita sólo un número limitado de símbolos (los babilonios sólo tenía dos, además de su símbolo para el cero) y que puede representar cualquier número entero, ya sea grande, también para realizar operaciones aritméticas mucho más fácil. Los babilonios tenían un sistema numérico sofisticado, se considera un sistema mixto de las bases 10 y 60

2.2.2 Sistema de Numeración Romano

Entre todos los sistemas de numeración creados a lo largo de la historia, es necesario mencionar el sistema de numeración romano. Los romanos usaron seis símbolos básicos: I, V, X, L, C, D y M; cada uno de éstos representa un valor determinado.

Número romano	I	V	X	L	C	D	M
Valor que representa en el sistema decimal	1	5	10	50	100	500	1000

ILUSTRACIÓN 3

Actualmente se usan en las primeras páginas de los libros, en prólogos, para escritura de los siglos, las series de reyes y papas y las ediciones de congresos, festivales, etc.

Es un sistema aditivo que facilita la suma pero no la multiplicación.

2.2.3 Sistema de Numeración Egipto

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema de escribir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos órdenes de unidades.

Se usaban tantos de cada uno cómo fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso. Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los jeroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban. En la ilustración 4, aparecen los símbolos usados para las potencias de diez. (Boyer 1987)

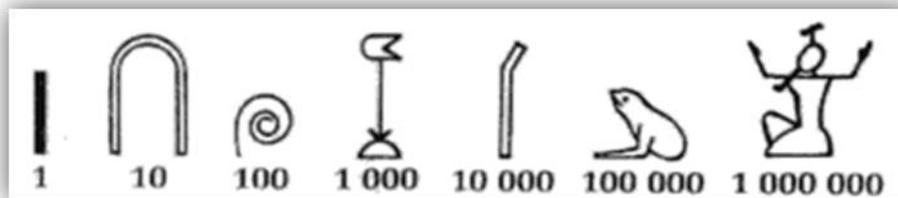


ILUSTRACIÓN 4

Estos signos fueron utilizados hasta la incorporación de Egipto al imperio romano. Pero su uso quedó reservado a las inscripciones monumentales; en el uso diario fue sustituido por la escritura hierática como se observa en la ilustración 5, formas más simples que permitían mayor rapidez y comodidad a los escribas.

En estos sistemas de escritura los grupos de signos adquirieron una forma propia, y así se introdujeron símbolos particulares para 20, 30, 90, 200, 300, 900, 2000, 3000. En los cuales se puede observar alguna regularidad en la escritura del símbolo.

1	ا	10	١٠	100	١٠٠	1000	١٠٠٠
2	١١	20	٢٠	200	٢٠٠	2000	٢٠٠٠
3	١٢	30	٣٠	300	٣٠٠	3000	٣٠٠٠
4	١٣	40	٤٠	400	٤٠٠	4000	٤٠٠٠
5	١٤	50	٥٠	500	٥٠٠	5000	٥٠٠٠
6	١٥	60	٦٠	600	٦٠٠	6000	٦٠٠٠
7	١٦	70	٧٠	700	٧٠٠	7000	٧٠٠٠
8	١٧	80	٨٠	800	٨٠٠	8000	٨٠٠٠
9	١٨	90	٩٠	900	٩٠٠	9000	٩٠٠٠

ILUSTRACIÓN 5

2.2.4 Sistema de numeración Maya

La civilización maya² (originaria de Guatemala) centró sus esfuerzos en el tiempo y su medida, tanto que crearon tres calendarios. Fue una de las culturas más desarrolladas y notables de América precolombina. Su precisión en la medida del tiempo les permitió superar cálculos realizados en Europa por la misma época; ejemplo de ello fue el cálculo de la duración del año solar con 365,242 días. Si se compara con el que se usa actualmente, el gregoriano, tiene un error de 1,98 diezmilésimas del año maya.

Los manuscritos mayas, especialmente el códice Dresde, revelan que entre los sacerdotes mayas existía un sistema de base 20, con un cero, donde el valor de la cifra estaba determinado por su posición en la escritura de los números.

Los símbolos principales designaban respectivamente los números 1 y 5; ellos se combinaban para formar otros hasta el 19. Escribían los números de abajo hacia arriba. El cero lo representaban con una concha de caracol marino. Las unidades de cada orden van aumentando en potencias de veinte³, excepto las unidades de tercer orden que corresponden a 18 de segundo orden; esto motivado en que en su calendario solar, un año es de 18 meses y no de 20. (Véase la ilustración 6).

² El mundo de los Mayas, Editorial Diana, México, 1960.

³ Los mayas contaban con los dedos de las manos y de los pies. En su lengua el número 20 significa: *Toda la persona*

0 	1 	2 	3 	4 
5 	6 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	13 	14 
15 	16 	17 	18 	19 
20 	21 	22 	23 	24 
25 	26 	27 	28 	29 

ILUSTRACIÓN 6

2.2.5 Sistema de Numeración Decimal

Según Carrizo (2004), Leonardo de Pisa fue uno de los primeros en introducir este nuevo sistema de numeración en Europa hacia el siglo VIII d. C., en la figura se representa un manuscrito español fechado en 976 d. C., donde aparecen las cifras numéricas indo-arábigas.



ILUSTRACIÓN 7

Estas cifras evolucionaron a través de los siglos, hasta llegar a las que conocemos actualmente:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

A continuación se presenta una imagen⁴ sobre la evolución histórica de los sistemas de representación numéricos hasta llegar a los actuales:

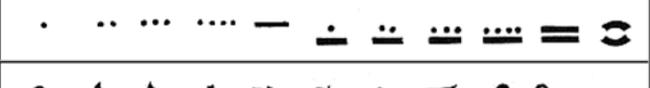
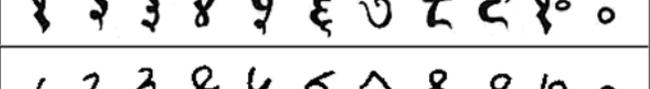
Babilonia	
Egipto	
Grecia	A B Γ Δ E F Z H Θ I
Roma	I II III IV V VI VII VIII IX X
China Antigua	一 二 三 四 五 六 七 八 九 十
Maya	
India	
Arabicos siglo 25	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 0
Actuales	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 0

ILUSTRACIÓN 8

Las reglas y convenciones que permiten expresar y escribir todos los números, constituye un sistema de numeración. En el sistema decimal de base diez, cada cifra tiene un valor que depende del lugar que ocupa, o sea, que cada unidad de un determinado orden de derecha a izquierda, representa un valor diez veces mayor que cada unidad del orden inmediatamente anterior situado a la derecha.

Lo mismo se aplica para las llamadas cifras decimales, que se escriben a la derecha de las unidades simples y se separan de éstas con una coma. De esta manera se constituyen ordenes sucesivos donde cada cifra representa un valor

⁴ Enciclopedia científica, p. 14

diez veces menor que cada unidad del orden inmediatamente anterior situado a la izquierda.

Como es bien sabido, para escribir una cifra en este sistema se colocan las cifras una a continuación de las otras, conviniendo en que cada una exprese unidades del orden indicado por el lugar que ocupa contando de derecha a izquierda.

Este sistema fue profundizado en Europa a partir del siglo XVI y es el que actualmente se usa por su capacidad para representar cualquier número y su utilidad en el cálculo de las operaciones aritméticas básicas.

2.3 LOS SISTEMAS NUMÉRICOS Y EL LENGUAJE NATURAL

Un sistema de numeración es un sistema de escritura para expresar los números, Un sistema de escritura es un sistema simbólico utilizado para representar conceptos o declaraciones para expresarse en un lenguaje determinado. Los sistemas de representación numérica hacen parte de un sistema de escritura matemática.

Así que, uno de los objetivos de este trabajo, es el de relacionar los sistemas de representación numérica con la comunicación oral y escrita.

Por otro lado, los sistemas de escritura se distinguen de otros sistemas alternativos de comunicación simbólica, como son los signos del tránsito, la pintura o los mapas, debido a que el lector debe entender primero la lengua hablada asociada para comprender el texto.

Muchos autores consideran el lenguaje como una condición innata de la humanidad. Sin embargo, el desarrollo de sistemas de escritura, y el proceso por el cual han suplantado a los sistemas tradicionales de comunicación oral ha sido

esporádico, irregular y lento. Una vez establecidos, los sistemas de escritura en general, cambian más lentamente que sus contrapartes en el lenguaje hablado. Por lo tanto, a menudo conservan rasgos y expresiones que ya no están vigentes en el lenguaje hablado. La gran ventaja de los sistemas de escritura es su capacidad para mantener un registro persistente de la información expresada en un lenguaje, que puede ser recuperada de forma independiente del acto inicial de formulación. Por lo anterior, los sistemas de escritura requieren por lo menos de los siguientes elementos:

- Un conjunto finito símbolos, llamados caracteres.
- Un conjunto de normas y convenciones comprendido y compartido por una comunidad, que usualmente es llamada gramática del lenguaje escrito.
- Un idioma (generalmente de habla) que le da sentido a las cadenas de símbolos permitidos por la gramática.

De lo anterior, se ve claramente la relación existente entre los sistemas de representación numérica y la comunicación como base para la producción de conocimientos.

2.4 LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN, EL LENGUAJE Y LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, socialmente decantadas y compartidas.

Las *competencias matemáticas*, según estudios del Ministerio de Educación Nacional, no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema⁵ significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

La comunicación se considera como una de esas competencias, basados en la idea de que a pesar de que las matemáticas en sí no son un lenguaje, pueden constituirse y comunicarse a través de diferentes lenguajes que se expresan y se representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la

⁵ Es una estrategia que organiza la experiencia de aprendizaje alrededor de la investigación y resolución de problemas del mundo real del estudiante. Vera María Teresita, "El aprendizaje por resolución de problemas", incluido en Sanjurjo L. y Vera M., "Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior", Rosario, Homo Sapiens Ediciones, 1995

eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos. Podría decirse con Raymond Duval (1999) que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido.

De la misma forma, los lineamientos de la educación matemática definen la comunicación como: *“Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos”⁶*.

En los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas. Muchas de estas características y habilidades se dan diariamente en la interacción de los alumnos en las clases, pero no se le ha puesto suficiente atención en el currículo de matemáticas, en parte por las limitaciones del tiempo y en parte porque se cree que no son tan importantes y que son asunto de los profesores de otras áreas.

Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas. Al respecto se dice que “la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Cuando los niños ven que una representación, como puede serlo una ecuación, es capaz de describir muchas situaciones distintas, empiezan a comprender la potencia de las matemáticas; cuando se dan cuenta de

⁶ Lineamientos curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (2000)

que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras, empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas”⁷.

De la misma manera, autores como Thomas A. Romberg (1991) en su artículo “Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas” destaca la comunicación verbal y escrita como una parte crucial del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por las siguientes razones: En primer lugar, la comunicación en forma de argumento lógico es fundamental para el discurso matemático. En segundo lugar, la comunicación es el medio por el cual los conocimientos personales se sistematizan en un ámbito y, por tanto, se aceptan como conocimiento nuevo. En tercer lugar el desarrollo en las categorías y estructuras del sistema lingüístico estructura la comprensión del niño y la hace progresar hacia un modelo de conciencia pública.

Los indicadores de comunicación se refieren a las formas y procesos comunicativos (estilos de razonamiento) que usan o pueden usar los alumnos: matemática verbal, escrita, icónica y simbólica. Las diferentes formas comunicativas-verbales, escritas de todo tipo, gestuales y motrices - son los indicadores básicos para analizar los comportamientos cognoscitivos de los niños y los jóvenes. En otras palabras, la comunicación es el espacio más importante para trabajar con los niños y para promover la cualificación de sus actos. La importancia que tienen las conductas del relato para hacer que la comunicación con el niño se transforme en un mediador más eficaz, puede analizarse en tres momentos propuestos en los lineamientos del MEN que se describen a continuación.

⁷ Lineamientos curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (2000)

2.4.1 Comunicación antes de la actividad

Radica en indagar la anticipación de los resultados a obtener por las acciones sobre objetos concretos o simbólicos. De esta manera se pueden conocer las concepciones que poseen los estudiantes, el modo como aplican sus conocimientos y las estrategias que utilizan para resolver problemas. Esta comunicación es fundamental para la movilización de los comportamientos matemáticos de tipo inductivo, como los que tienen que ver con la capacidad de plantear conjeturas y descubrir fórmulas o leyes generales.

2.4.2 Comunicación durante la actividad

Es conveniente estimular a los estudiantes para que expliquen lo que están haciendo y pensando y, si es posible, que “justifiquen” de alguna manera el porqué o para qué lo están haciendo. Lo anterior tiene importancia cognoscitiva puesto que el estudiante es promovido a pensar en la acción o en el acontecimiento; pero también el maestro o el acompañante disponen de indicadores que informan sobre lo que éste está comprendiendo y de las calidades de la comprensión.

2.4.3 Comunicación posterior a la actividad

Se trata de iniciar en los estudiantes la presencia de las actividades realizadas en el pasado; así se facilitan los recuerdos de los aprendizajes logrados. Ellos regresan a la memoria consciente luego de participar en las complejas interacciones cerebrales, donde posiblemente han ocurrido asociaciones, olvidos, cernidos y cambios de significación. Así, el docente logra analizar el estado de los aprendizajes al mismo tiempo que el estudiante reflexiona y recuerda.

De lo anterior, surgen estrategias importantes para el docente: todos aquellos conocimientos considerados como fundamentales o básicos, deben ser recordados en diferentes intervalos de tiempo.

En la competencia escrita, es posible observar cómo se usan y representan las relaciones matemáticas, cómo se codifican las expresiones del lenguaje común que deben ser expresadas en lenguaje matemático y, también, la lectura en lenguaje común de las expresiones dadas en lenguaje matemático.

Según el Ministerio de Educación Nacional, en las representaciones icónicas debe analizarse si éstas se parecen a lo que se quiere representar. El docente debe tener cuidado con la interpretación de dichas representaciones, pues muchos problemas son aplicables a la percepción y no a las aptitudes matemáticas. Esto lleva al docente a utilizar las conductas del relato para descubrir lo que el estudiante representó o quiere representar; sin embargo, también es posible que el estudiante esté representando bien aun cuando el concepto esté mal comprendido; por ejemplo, pensando y representando el cuadrado como un rectángulo.

2.5 PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. En el caso del estudio de los números naturales, se trabaja con el conteo de cantidades discretas y, para el de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas.

Asimismo, en el trabajo con los números naturales, las experiencias con las distintas formas de conteo y con las operaciones usuales (adición, sustracción, multiplicación y división) generan una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas. Es decir que “en cierto sentido, la numerosidad o cardinalidad de estas cantidades se está midiendo con un conjunto unitario como unidad simple, o con la pareja, la decena o la docena como unidades complejas, y las operaciones usuales se asocian con ciertas combinaciones, separaciones, agrupaciones o reparticiones de estas cantidades”⁸.

Por otra parte, se refiere a que dichas extensiones sucesivas de los sistemas numéricos y de sus sistemas de numeración representan una fuerte carga cognitiva para estudiantes y docentes y una serie de dificultades didácticas para los maestros. Históricamente, se fueron configurando sistemas numéricos llamados “naturales”, “rationales positivos” (o “fraccionarios”), “enteros”, “rationales”, “reales” y “complejos”, cada uno de ellos con operaciones y relaciones extendidas a los nuevos sistemas numéricos a partir de su significado en los naturales y con sus sistemas de numeración o sistemas notacionales cada vez más ingeniosos; allí radica la importancia epistemológica para que los estudiantes tengan una aprendizaje significativo⁹ desde el sistema de numeración decimal.

⁸ Lineamientos curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (2000)

⁹ Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.

Igualmente, el desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan. El complejo y lento desarrollo histórico de estos sistemas numéricos y simbólicos enunciados, sugiere que la construcción de cada uno de estos sistemas conceptuales y el manejo competente de uno o más de sus sistemas simbólicos no puede restringirse a grados específicos del ciclo escolar, sino que todos ellos se van construyendo y utilizando paciente y progresivamente a lo largo de la Educación Básica y Media. Según el MEN el acompañamiento pedagógico paciente y progresivo de los estudiantes puede lograr que la gran mayoría de ellos logre la hazaña de recorrer doce milenios de historia del pensamiento numérico en sólo doce años de escolaridad.

2.6 COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS Y DE LA NUMERACIÓN

La comprensión de conceptos numéricos apropiados se puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de los significados de los números, a partir de sus experiencias en la vida cotidiana, y con la construcción de un sistema de numeración propio teniendo como base actividades de contar, agrupar y el uso del valor posicional.

2.6.1 Significados de los números

Los números tienen distintos significados para los niños de acuerdo con el contexto en el que se emplean. En la vida real se utilizan de distintas maneras, entre las cuales están las siguientes (Rico, 1987):

1. **Como secuencia verbal** los números se utilizan en su orden habitual (uno, dos, tres, etc.), sin hacer referencia a ningún objeto externo.
2. Los números para **contar**; cada uno se asocia a un elemento de un conjunto de objetos discretos. Este contexto conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto.
3. El número **como cardinal**; cuando un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos.
4. Los números **para medir** cuando describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua (como longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, etc.),
5. En un contexto **ordinal** el número describe la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial.
6. En los contextos de **código**, los números se utilizan para distinguir clases de elementos. Son etiquetas que identifican cada una de las clases.

Para que los niños logren entender el significado de los números, en cada uno de esos contextos, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.

Es de anotar que la construcción misma del concepto de número requiere de un largo proceso en el que uno de sus indicadores se ubica en el momento en que los niños logran integrar los aspectos ordinal y cardinal del número, es decir, cuando al contar asocia a la última palabra número un doble significado: para distinguir un

objeto que tiene la misma categoría de los restantes y para representar la cantidad de objetos de la colección.

Por todo lo anterior, **la comprensión significativa de lo que es un sistema de numeración**, que incluya una apreciación de su estructura, su organización y su regularidad, es fundamental para comprender conceptos numéricos y adquirir las competencias matemáticas.