

**EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SOBRE
CONJUNTOS SINGULARES HIPERBÓLICOS**

Rosember Edén Cardenas Torres

**Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2011**

EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SOBRE CONJUNTOS SINGULARES HIPERBÓLICOS

Rossember Edén Cardenas Torres

Trabajo final presentado como
requisito parcial para optar el título de:

Magister en Ciencias Matemáticas.

Director:
Serafín Bautista Díaz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2011

Resumen

En este trabajo de Maestría vamos a reconstruir el siguiente resultado de Bautista y Morales: *Cada sumidero singular hiperbólico de un flujo C^1 sobre una 3-variedad cerrada tiene una órbita periódica.*

Abstract

In this Master work we will rebuild the following result of Bautista and Morales:
every singular-hyperbolic attracting set a C^1 flow on a compact 3-manifold has a periodic orbit.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos singulares-hiperbólicos	2
1.1.1. Descomposición dominada	3
1.1.2. Propiedades de los conjuntos singulares hiperbólicos	6
1.2. Hiperbolicidad vía conos	10
1.3. Teorema del flujo tubular	11
2. Mapas triangulares	12
2.1. Hipótesis (H1) y (H2)	15
2.2. Mapas triangulares con dominio principal	21
3. Teorema principal	28
3.1. Construcción sección transversal singular	28
3.1.1. Foliación inducida	30
3.2. Mapa de retorno	33
3.2.1. Refinamiento del mapa de retorno	34
3.2.2. Mapas de retorno hiperbólico triangulares con dominio principal	38

Introducción

Los conjuntos singulares hiperbólicos fueron introducidos en [MPP] y [MPP04], para clasificar los conjuntos C^1 robustos transitivos sobre 3 variedades, los cuales incluyen los conjuntos hiperbólicos. Una propiedad bien conocida de los conjuntos hiperbólicos es que si es aislado y no se reduce a un equilibrio contiene una órbita periódica, esto se sigue del lema de sombreado para flujos; el atractor geométrico de Lorentz es el ejemplo clásico de un conjunto singular hiperbólico que es aislado y tiene órbitas periódicas, luego resulta natural tratar de extender esta propiedad. Sin embargo el flujo de Cherry descrito en [BDV] es un contraejemplo que muestra que dicha conjetura no es cierta; por lo tanto se tiene que el lema de sombreado no es válido en general para conjuntos singulares hiperbólicos. Así la condición de ser aislado no es suficiente para establecer la existencia de órbitas periódicas en dichos conjuntos; en [BM] se demuestra que considerando una propiedad adicional, es decir, que el conjunto sea un sumidero podremos garantizar la existencia de órbitas periódicas.

De ahí que en este trabajo pretendemos reescribir y analizar el resultado principal presentado en [BM]; “*un sumidero singular hiperbólico de un flujo C^1 sobre una 3-variedad cerrada tiene una órbita periódica*”; y sus respectivas implicaciones en la estructura de los conjuntos singulares hiperbólico.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección daremos algunas definiciones, y resultados que usaremos en el presente trabajo. Si $X \in \chi^1(M)$, denotaremos por X_t el flujo generado por X . El campo vectorial asociado a X_t será denotado por X . Una órbita de X_t es el conjunto $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$ para algún $q \in M$. El conjunto ω -límite de un punto p es el conjunto $\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. El conjunto α -límite de un punto p es $\alpha_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{-t_n}(p) \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. Una singularidad de X_t es un punto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$ o equivalentemente $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Una *órbita periódica* de X_t es una órbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X(p)$ tal que $X_T(p) = p$ para algún $T > 0$ (equivalentemente a que \mathcal{O} es compacto y $\mathcal{O} \neq \{p\}$). Una órbita cerrada de X_t es una singularidad o una órbita periódica de X_t .

Definición 1 Dado X_t un flujo sobre M . Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ es:

- **Invariante** si $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$
- **Transitivo** si $\Lambda = \omega_X(p)$ para algún $p \in \Lambda$
- **No-trivial** si Λ no es una órbita cerrada de X_t
- **Aislado** si existe una vecindad compacta U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

(U es llamado bloque aislante).

- **Sumidero** si este es aislado y tiene un bloque aislante positivamente invariante U , esto es

$$X_t(U) \subset U \text{ para todo } t \geq 0$$

- **Atractor** si este es un sumidero transitivo.

1.1. Conjuntos singulares-hiperbólicos

Definición 2 Un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ de X es hiperbólico si existe una descomposición continua y DX_t -invariante del fibrado tangente de M sobre Λ de la forma

$$TM = E^s \oplus E^X \oplus E^u,$$

tal que para algunas constantes K, λ y una métrica riemanniana en M se tiene

1. $\|DX_t(x)/_{E^s}\| \leq Ke^{-\lambda t}$, para todo $t > 0$ y para todo $x \in \Lambda$.
2. $\|DX_{-t}(x)/_{E^u}\| \leq Ke^{-\lambda t}$, para todo $t > 0$ y para todo $x \in \Lambda$.
3. $E^X = \langle X \rangle$ (i.e., E^X es la dirección del campo)

Observación 1 ■ Las constantes depende de la métrica y estas son las mismas para cualquier punto sobre la variedad.

- La derivada se esta evaluando sobre Λ .
- DX_t es invariante si $DX_t(x)E_x^s = E_{X_t(x)}^s$ y $DX_t(x)E_x^u = E_{X_t(x)}^u$.

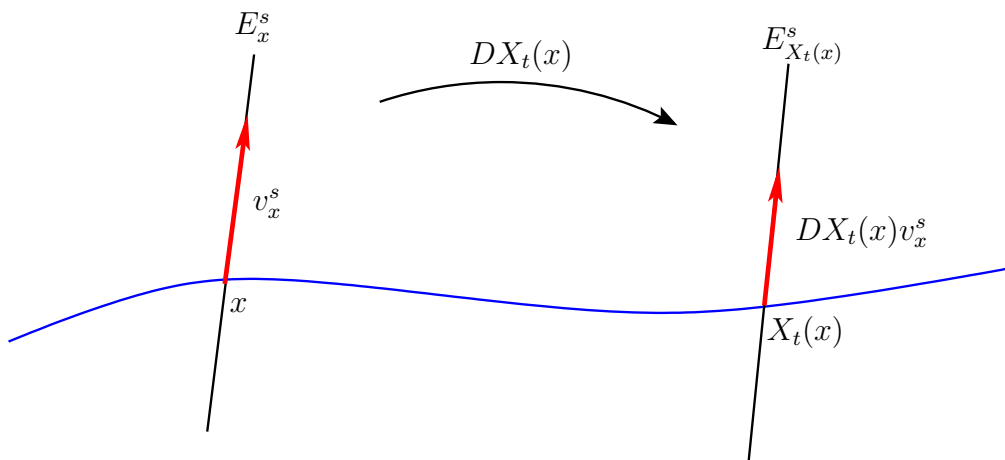


Figura 1.1: DX_t Invariancia del fibrado tangente E^s .

La situación presentada la figura 1.1 es análoga para el espacio E_x^u .

1.1.1. Descomposición dominada

Sea $\Lambda \subseteq M$ un conjunto compacto invariante por X , una descomposición continua y DX_t -invariante del fibrado tangente de M sobre Λ de la forma

$$T_\Lambda = E_\Lambda \oplus F_\Lambda$$

es una descomposición dominada si existen constantes positivas K, λ y una métrica Riemanniana en M tales que

$$\frac{\|DX_t(x)/_{E_x}\|}{m(DX_t(x)/_{F_x})} \leq Ke^{-\lambda t} \quad \text{para todo } x \in \Lambda \text{ y para todo } t > 0 \quad (1.1)$$

Veamos las implicaciones de la condición (1.1), denotamos por

$$m(L) = \inf_{v \neq 0} \frac{\|Lv\|}{\|v\|} \quad (1.2)$$

la norma mínima de un operador lineal.

Recordemos además que la norma de un operador lineal se define como

$$\|L\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Lv\|}{\|v\|} \quad \text{para todo } v \in L \quad (1.3)$$

Luego tenemos de (1.2) y (1.3) que

$$m(L) \leq \frac{\|Lv\|}{\|v\|} \quad \text{para todo } v \in L$$

De ahí que

$$m(L) \leq \frac{\|Lv\|}{\|v\|} \leq \|L\|$$

En particular

$$\begin{aligned} m(DX_t(x)/_{F_x}) &\leq \frac{\|DX_t(x)V_x^F\|}{\|V_x^F\|} \leq \|DX_t(x)/_{F_x}\| \\ \frac{\|V_x^F\|}{\|DX_t(x)V_x^F\|} &\leq \frac{1}{m(DX_t(x)/_{F_x})} \\ \frac{1}{\|DX_t(x)V_x^F\|} &\leq \frac{1}{m(DX_t(x)/_{F_x})} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Análogamente

$$\frac{\|DX_t(x)V_x^E\|}{\|V_x^E\|} \leq \|DX_t(x)/_{E_x}\| \quad (1.5)$$

De (1.4) y (1.5) tenemos

$$\frac{\frac{\|DX_t(x)V_x^E\|}{\|V_x^E\|}}{\frac{\|DX_t(x)V_x^F\|}{\|V_x^F\|}} \leq \frac{\|DX_t(x)/_{E_x}\|}{m(DX_t(x)/_{F_x})} \leq ke^{-\lambda t}$$

Luego

$$\frac{\|DX_t(x)V_x^E\|}{\|DX_t(x)V_x^F\|} \leq \frac{\|V_x^E\|}{\|V_x^F\|} ke^{-\lambda t}$$

Por lo tanto

$$\tan \theta' \leq \tan \theta$$

De lo anterior podemos concluir que el vector V es comprimido hacia F para cada

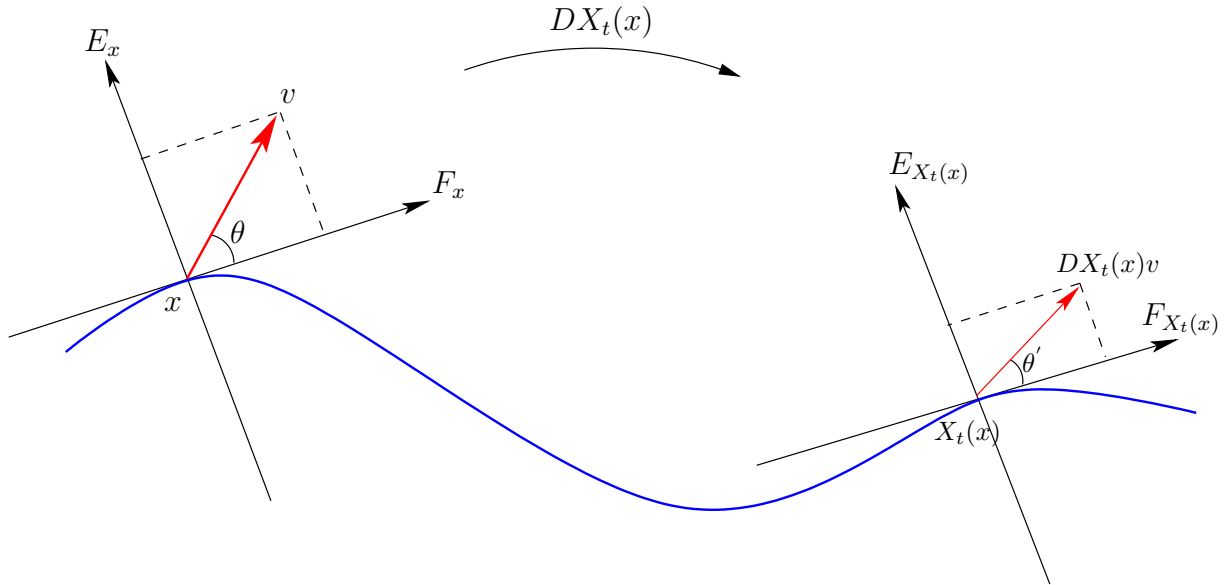


Figura 1.2: Descomposición $(K - \lambda)$ dominada, $\theta' < \theta$.

$x \in \Lambda$, ver figura 1.2.

Observación 2 *Asumiremos que en una descomposición dominada, los subfibrados tangentes son siempre no triviales. Es decir que $E_x \neq 0$ y $F_x \neq 0$ para cada $x \in \Lambda$.*

Definición 3 Un conjunto compacto invariante Λ es parcialmente hiperbólico si este exhibe una descomposición dominada

$$T_\Lambda = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$$

tal que E_Λ^s es contracting, i.e.

$$\|DX_t(x)/_{E_\Lambda^s}\| \leq Ke^{-\lambda t} \text{ para todo } x \in \Lambda \text{ y para todo } t > 0$$

Definición 4 Un conjunto singular-hiperbólico Λ de X_t es un conjunto parcialmente hiperbólico con singularidades hiperbólicas y expande volumen en subfibrado central E_Λ^c , esto es

$$|\det(DX_t(x)/_{E_\Lambda^c})| \geq K^{-1}e^{\lambda t} \text{ para todo } t > 0 \text{ y para todo } x \in \Lambda$$

Un sumidero singular hiperbólico es un conjunto singular hiperbólico que también es sumidero.

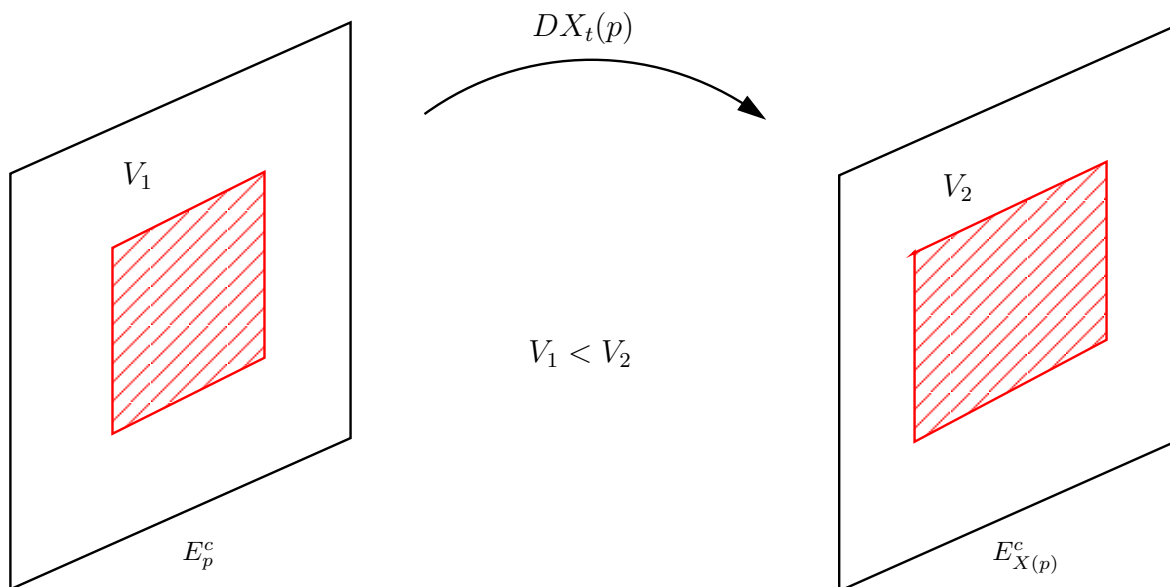


Figura 1.3: Expande volumen

El ejemplo más representativo de un conjunto singular hiperbólico es el atractor geométrico de Lorenz.

Observación 3 Por definición, un conjunto singular hiperbólico tiene que tener una descomposición dominada, y por tanto sus dos subfibrados tangentes son no triviales. Entonces un conjunto singular hiperbólico no admite ni focos ni fuentes consecuentemente los conjuntos singulares hiperbólicos son una extensión de conjuntos hiperbólicos tipo silla y así los sumideros singulares hiperbólicos siempre son no triviales.

1.1.2. Propiedades de los conjuntos singulares hiperbólicos

La teoría de variedades invariantes afirma que si H es un conjunto hiperbólico de X_t y $p \in H$, entonces los conjuntos

$$W_X^{ss}(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow \infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0\}$$

y

$$W_X^{uu}(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0\}$$

son variedades inmersas de M de clase C^1 . Estas variedades se llaman variedades estables e inestables fuertes de p . Además $W_X^{ss}(p)$ y $W_X^{uu}(p)$ son tangentes respectivamente a los espacios lineales E_p^s y E_p^u en p . Una órbita cerrada O de x_t es hiperbólica si esta es hiperbólica como conjunto invariante. En este caso definimos:

$$W_X^s(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{ss}(X_t(p)) \quad W_X^u(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{uu}(X_t(p))$$

Teorema 1 *Dado Λ un conjunto singular hiperbólico no trivial y conexo de X_t . Si $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ es una descomposición singular hiperbólica de Λ , entonces:*

(1) $X(x) \subset E_x^c$ para cada $x \in \Lambda$.

(2) $\dim(E_x^s) = 1$ para cada $x \in \Lambda$

Demostración. Supongamos por contradicción que esto no se tiene. Entonces, $X(x_0) \in E_{x_0}^s$ para algún $x_0 \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$. Se sigue de la invariancia de E^s que $X(x) \in E_x^s$ para cada x en la órbita de x_0 . Por lo tanto $X(x) \in E_x^s$ para todo $x \in \alpha_X(x_0)$, y así, $\omega_X(x)$ es una singularidad para todo $x \in \alpha_X(x_0)$. En particular, $\alpha_X(x_0)$ contiene una singularidad σ que necesariamente es tipo silla. Ahora tenemos dos casos: $\alpha_X(x_0) = \{\sigma\}$ o no. Si $\alpha_X(x_0) = \{\sigma\}$ entonces $x_0 \in W_X^u(\sigma)$ y luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|DX_{-t}(x_0)(X(x_0))\| = 0$$

contradiendo $X(x_0) \in E_{x_0}^s$. Esto demuestra el primer caso.

Si $\alpha_X(x_0) \neq \{\sigma\}$ entonces $(W_X^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha_X(x_0) \neq \emptyset$. Escojamos un $x_1 \in (W_X^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha_X(x_0)$. Claramente $X(x_1) \in E_{x_1}^s$ y así tenemos una contradicción como en el primer caso, reemplazando x_0 por x_1 .

Segundo afirmamos que el ángulo entre E_x^s y $X(x)$ está uniformemente acotado lejos del cero para $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$. Ciertamente, la afirmación implica que el ángulo

entre E_x^s y $X(x)$ esta acotado lejos del cero, para cada $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$. Por otra parte, usando linealización de coordenadas, podemos probar que tal ángulo esta acotado uniformemente lejos del cero cerca de las singularidades.

La parte (1) se sigue de la segunda afirmación y de la dominancia de E^s . Ciertamente, tomando $x \in \Lambda$, $t > 0$ y definamos $v_t = X(X_{-t}(x))$. La segunda afirmación implica que el ángulo entre v_t y $E_{X_{-t}(x)}^s$ esta acotado lejos del cero. De la dominancia de E^s sobre E^c tenemos que el ángulo entre $DX_t(X_{-t}(x))(v_t) = X(x)$ y E_x^c puede ser arbitrariamente pequeño. Luego, $X(x) \in E_x^c$ probando (1).

Ahora veamos que

$$\dim(E_x^c) = 2 \text{ para cada } x \in \Lambda.$$

Supongamos por contradicción que esto no se tiene. Entonces, $\dim(E_{x_0}^c) = 1$ para algún $x_0 \in \Lambda$. Aquí E^c es continuo y Λ es conexo tenemos $\dim(E_x^c) = 1$ para cada $x \in \Lambda$. Consecuentemente E_Λ^c podría también expandir volumen. Esto junto con la segunda afirmación $DX_t(x)(X(x)) \rightarrow \infty$ (cuando $t \rightarrow \infty$) para cada $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(x)$. Como Λ es compacto podríamos tener una contradicción al menos que $\Lambda \setminus \text{Sing}(X) = \emptyset$. Como Λ es conexo tendríamos que Λ es una singularidad de X_t lo que es absurdo ya que Λ es no trivial. Esta contradicción muestra que $\dim(E_x^c) = 2$ para cada $x \in \Lambda$.

Finalmente, probaremos (2). Como Λ es conexo y la descomposición es continua, tenemos que $\dim(E_x^s) = 3 - \dim(E_x^c) = 3 - 2 = 1$, para todo x ya que $\dim(E_x^c) = 2$ para todo $x \in \Lambda$. ■

Definición 5 Una singularidad σ de X es Lorenz-like si sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son reales, y tienen algún orden que satisface la siguiente relación

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$$

Todas las singularidades σ , de un atractor singular hiperbólico, son hiperbólicas, esto es, sus autovalores asociados tienen parte real diferente de cero. Luego las variedades invariantes $W^s(\sigma, X)$ y $W^u(\sigma, X)$ están bien definidas y son tangentes respectivamente a los subespacios asociados al conjunto de autovalores $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ y $\{\lambda_1\}$. Además si γ es una singularidad con dos autovalores positivos de X denotamos $W^{ss}(\gamma, X) = W^s(\gamma, X)$.

Lema 2 Sea Λ un conjunto singular hiperbólico conexo de X_t . Si $\sigma \in \text{Sing}(X) \cap \Lambda$, entonces σ es Lorenz-like o tiene dos autovalores positivos. En cualquier caso se tiene

$$\Lambda \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$$

Demostración. Primero veamos que σ es Lorenz-like o tiene dos autovalores positivos. Denotamos por $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$, la descomposición singular de Λ . Si Λ es trivial entonces el resultado es inmediato. Entonces asumamos que Λ es no-trivial. Como Λ es conexo, el Teorema 1 implica que $X(x) \in E_x^c$ y $\dim(E_x^s) = 1$ para cada $x \in \Lambda$. En particular, $\dim(E_\sigma^s) = 1$ y luego σ tiene una dirección contracting (fuerte) con autovalor $\lambda_2 < 0$

Si σ tiene únicamente una dirección contracting, entonces σ tiene dos autovalores positivos.

Ahora asumamos que σ tiene otro autovalor negativo λ_3 , luego se tiene que, $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$ por dominancia de la descomposición. Ya que $\dim(M) = 3$ y ninguna singularidad en un conjunto singular hiperbólico puede ser attracting (por la condición de que expande volumen) tenemos que existe un tercer autovalor $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$ de σ . Se sigue de la condición de expandir volumen que $-\lambda_3 < \lambda_1$. En este último caso tenemos que σ es Lorenz-like.

Ahora veamos que $\Lambda \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$. Supongamos que esto no se tiene. Entonces, existe $x_0 \in \Lambda \cap (W_X^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\})$. Como $W_X^{ss}(\sigma)$ es una subvariedad invariante, tenemos que $X_{x_0} \in E_{x_0}^s$. Entonces $X(x_0) \in E_{x_0}^s \cap E_{x_0}^c$, con lo cual $X(x_0) = 0$, lo que es absurdo. Esta contradicción prueba la igualdad. ■

Corolario 3 *Sea Λ un sumidero singular hiperbólico de X_t . Si $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ es una descomposición singular hiperbólica de Λ , entonces:*

- (1) $X(x) \subset E_x^c$ para cada $x \in \Lambda$.
- (2) $\dim(E_x^s) = 1$ para cada $x \in \Lambda$
- (3) Además de eso, si $\sigma \in \text{Sing}(X) \cap \Lambda$, entonces σ es Lorenziana o tiene dos autovalores positivos. En cualquier caso se tiene

$$\Lambda \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$$

Demostración. Podemos asumir que Λ es conexo, caso contrario, consideramos las componentes conexas. Además, Λ es no-trivial de otra manera Λ podría ser una singularidad tipo silla contradiciendo la hipótesis que Λ es un sumidero. Luego el resultado, se sigue del Teorema 1 y del Lema 2. ■

Teorema 4 *Sea σ una singularidad de un sumidero Λ singular hiperbólico de X_t . Si existe un bloque aislante U de Λ y $x \in U \setminus W_X^{ss}(\sigma)$ tal que $\sigma \in \omega_X(x)$, entonces σ es Lorenz-like y satisface*

$$\Lambda \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$$

Demostración. Dado Λ un sumidero singular hiperbólico de X_t . Como en la prueba anterior, asumiremos que Λ es conexo, caso contrario, consideraremos las componentes conexas.

Dado U un bloque aislante de Λ . Supongamos que $\sigma \in \text{Sing}(X) \cap \Lambda$ satisface $\sigma \in \omega_X(x)$ para algún $x \in U \setminus W_X^{ss}(\sigma)$. La igualdad se sigue del Lema 2. Ahora probaremos que σ es Lorenz-like. Ya que Λ es attracting y U es un bloque aislante de Λ tenemos que $\omega_X(x) \subset \Lambda$ y luego $\sigma \in \Lambda$.

Asumamos por contradicción que σ no es Lorenz-like. Entonces, σ tiene dos autovalores positivos por el Lemma 2. Como $x \notin W_X^{ss}(\sigma)$ tenemos que

$$\omega_X(x) \cap (W_X^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \neq \emptyset.$$

Pero, recordemos que

$$\omega_X(x) \subset \Lambda.$$

Como σ tiene dos autovalores positivos tenemos que

$$W_X^{ss}(\sigma) = W_X^s(\sigma).$$

Luego,

$$\Lambda \cap (W_X^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \neq \emptyset.$$

contradiciendo la igualdad del Lema 2. ■

Proposición 5 *Sea Λ un sumidero singular hiperbólico de un flujo X_t de clase C^1 sobre una 3 variedad cerrada. Si Λ no tiene singularidades Lorenz-like, entonces Λ tiene una órbita periódica.*

Demostración. Escogamos $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$. Claramente x está contenido en un bloque aislante de Λ . Veamos que $\omega_X(x)$ no tiene singularidades. En efecto, supongamos por contradicción que $\omega_X(x)$ tiene una singularidad σ . Por hipótesis, Λ no tiene singularidades Lorenz-like, luego σ tampoco es Lorenz-like. Por lo tanto $W_X^{ss}(\sigma) = W_X^s(\sigma)$ es unidimensional y además

$$\Lambda \cap (W_X^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}) = \emptyset$$

por el Lema 2. Se sigue en particular que las dos órbitas positivas que forman $W_X^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ no están en Λ . Como $x \in \Lambda \setminus \text{sing}(X)$ tenemos que $x \notin W_X^s(\sigma) = W_X^{ss}(\sigma)$ y luego σ podría ser Lorenz-like por el Teorema 4, contradicción. Concluamos la prueba de la proposición. Claramente $\omega_X(x) \subset \Lambda$ ya que Λ es compacto. La afirmación y [MP] implica que $\omega_X(x)$ es un conjunto hiperbólico. Se sigue del Lema de sombreado para flujos, que existe una órbita periódica de X_t cerca a $\omega_X(x)$. Ya que Λ es un sumidero, tenemos que tal órbita periódica está contenida en Λ . Por lo tanto tenemos que la Proposición 5 se verifica. ■

1.2. Hiperbolicidad vía conos

Sea W un espacio vectorial con producto interno. Un cono en W es un conjunto C tal que existe una forma cuadrática no degenerada.

$$B : W \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } C = \{v \in W : B(v) \leq 0\}$$

Podemos expresar C con respecto a una descomposición $W = E \oplus F$

$$C = \{v = (v_E, v_F) : \|v_E\| \leq a\|v_F\|\}$$

Para algún $a > 0$ (en este caso $B(v) = -a^2\|v_F\|^2 + \|v_E\|^2$). La dimensión de un cono C es la máxima dimensión entre todos los subespacios contenidos en C .

El siguiente Teorema nos da dos condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea hiperbólico.

Teorema 6 *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto compacto invariante. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. Λ es hiperbólico
2. Existen dos familias de conos C^s y C^u en Λ con dimensiones complementarias y dimensión constante a lo largo de las órbitas tales que
 - $Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$ y $Df_x^{-1} C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$.
 - Existe $\sigma > 1$ y $m > 0$ tal que $\|Df^m v\| \geq \sigma\|v\|$ si $v \in C^u$ y $\|Df^{-m} v\| \geq \sigma\|v\|$ si $v \in C^s$

Demostración. Ver [S]. ■

Observación 4 *Definimos*

$$E^s(x) = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s$$

$$E^u(x) = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{-n}(x)}^n C_{f^{-n}(x)}^u$$

A continuación ilustraremos gráficamente la caracterización de la hiperbolicidad via conos.

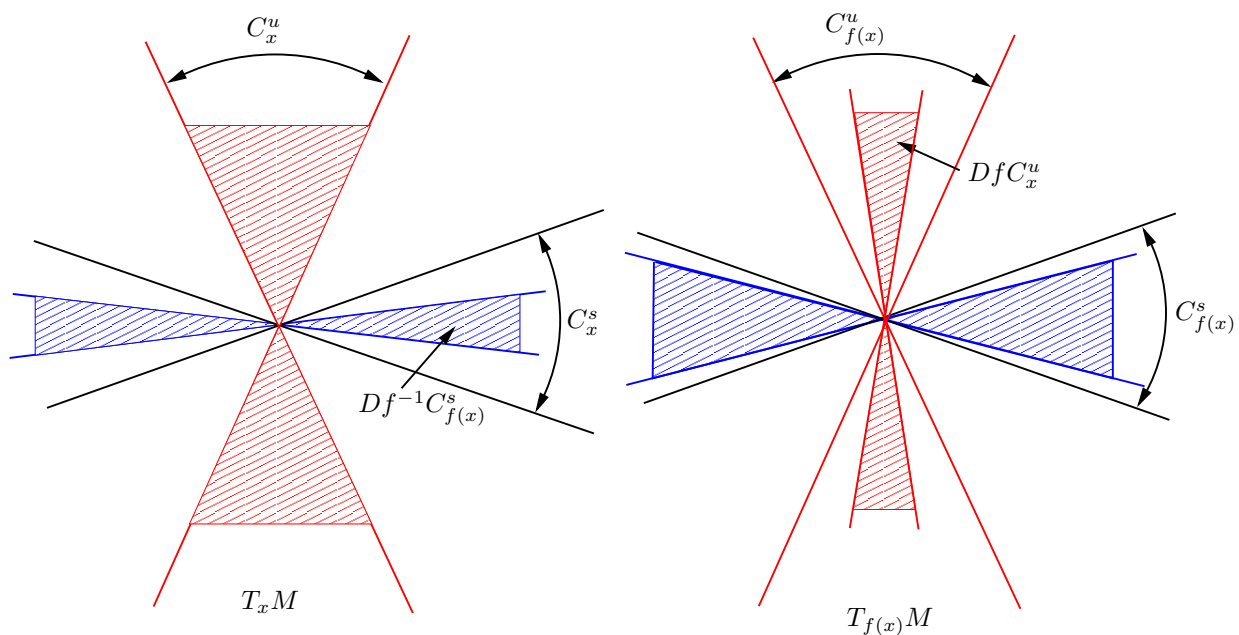


Figura 1.4: Hiperbolicidad vía conos.

1.3. Teorema del flujo tubular

Teorema 7 Sea p un punto no singular de $X : \Delta \rightarrow \mathbf{R}^n$ de clase C^r y $f : A \rightarrow \Sigma$ una sección transversal local de X de clase C^r con $f(0) = p$. Entonces existe una vecindad V de p en Δ y un difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de clase C^r , donde $\epsilon > 0$ y B es una bola abierta en \mathbf{R}^{n-1} de centro en el origen $0 = f^{-1}(p)$ tal que

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;
2. h es una C^r -conjugación entre $X \setminus V$ y un campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbf{R}^n$, $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$.

Demostración. Ver [ST]. ■

El Teorema 7 nos demuestra que mediante cambios de coordenadas en una vecindad de un punto que no es singular (punto regular), cualitativamente las soluciones son equivalentes, por ejemplo, a una familia de líneas horizontales en un plano.

Capítulo 2

Mapas triangulares

Sea $I = [-1, 1]$, I_i es una copia de I y Σ_i es una copia de I^2 para $i = 1, \dots, k$. Denotaremos Σ por la unión disjunta de cuadrados Σ_i . Se define

$$L_{-i} = \{-1\} \times I_i; \quad L_{0i} = \{0\} \times I_i; \quad L_{+i} = \{1\} \times I_i$$

Para $i = 1, \dots, k$ y

$$L_- = \bigcup_{i=1}^k L_{-i}; \quad L_0 = \bigcup_{i=1}^k L_{0i}; \quad L_+ = \bigcup_{i=1}^k L_{+i}$$

Dado un mapa $F : Dom(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, denotamos por $Dom(F)$ el dominio de F y por $D(F)$ el conjunto de discontinuidades de F , esto es

$$D(F) = \{x \in Dom(F) : F \text{ es discontinúa en } x\}$$

Un punto $x \in Dom(F)$ es un punto periódico de F si existe $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \in Dom(F)$ para todo $0 \leq j \leq n-1$ y $F^n(x) = x$. Una curva c en Σ es la imagen de una transformación C^1 inyectiva $c : Dom(c) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, tal que $Dom(c)$ es un intervalo compacto. Una curva L en Σ , es llamada vertical si esta es el gráfico de alguna transformación $g : I_i \rightarrow I_i$ de clase C^1 , esto es $L = \{(g(y), y) : y \in I_i\} \subset \Sigma_i$, para algún $i = 1, \dots, k$. Una foliación continua \mathcal{F}_i en una componente Σ_i de Σ es una foliación vertical de Σ_i , si \mathcal{F}_i es formada por curvas verticales tales que las curvas L_i, L_{0i}, L_{+i} son folias de \mathcal{F}_i . Una foliación vertical \mathcal{F} de Σ , es unión de foliaciones verticales de cada $i = 1, \dots, k$. El espacio de folias SL de \mathcal{F} , es una unión disjunta de k -copias I_1, \dots, I_k de I .

Si \mathcal{F} es una foliación vertical de Σ , un subconjunto $B \subset \Sigma$ es llamado \mathcal{F} -saturado, si $L \in \mathcal{F}$ y $L \cap B \neq \emptyset$ implica $L \subset B$. Si $B \subset \Sigma$, denotamos por \mathcal{F}_B la unión de folias que interceptan a B , por lo tanto B es \mathcal{F} -saturado si y solo si $B = \mathcal{F}_B$. Si $S \subset \Sigma$ y $B \subset \Sigma$, diremos que S cubre B si $B \subset \mathcal{F}_S$.

Supongamos que $\Sigma = \Sigma_1$ está foliado solo por rectas verticales, si $B \subset \Sigma$, su correspondiente saturado se muestra en la figura 2.1.

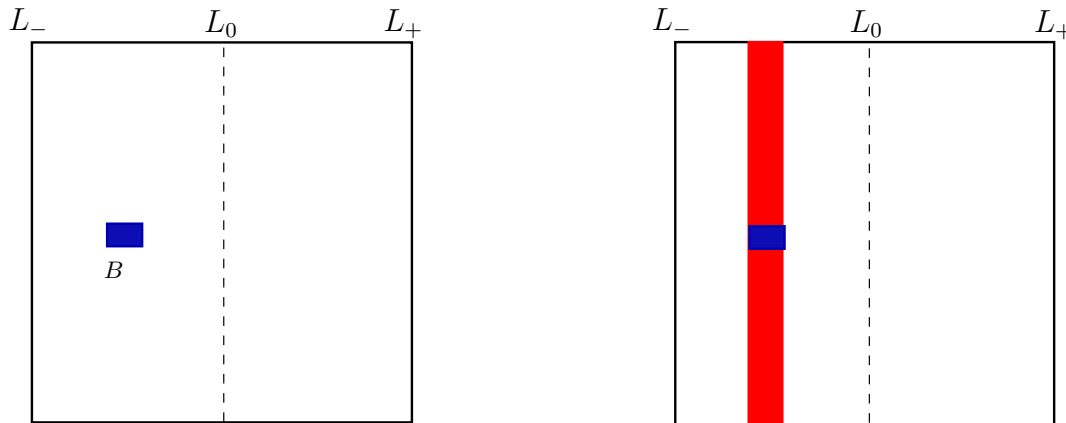


Figura 2.1: Conjunto B y su correspondiente saturado.

Definición 6 *Un mapa triangular es un mapa inyectivo $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, que tiene asociada una foliación vertical \mathcal{F} de Σ tal que satisface las siguientes condiciones:*

- (1) $\text{Dom}(F)$ es \mathcal{F} -saturado.
- (2) Si $L \in \mathcal{F}$ y $L \subset \text{Dom}(F)$, entonces existe $f(L) \in \mathcal{F}$, tal que $F(L) \subset f(L)$
- (3) $F/L : L \rightarrow f(L)$ es continua.

Observación 5 ■ *Si $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, es un mapa triangular que tiene asociada una foliación vertical \mathcal{F} , entonces tenemos asociada una transformación 1-dimensional $f : \text{Dom}(f) \subset SL \rightarrow SL$. Dado que F preserva la foliación, el mapa 1-dimensional f , nos permite considerar los siguientes límites:*

$$f(L_{**+}) = \lim_{L \rightarrow L_{**+}} f(L) \text{ y } f(L_{**-}) = \lim_{L \rightarrow L_{**-}} f(L)$$

para todo $L_{**} \subset \text{Cl}(\text{Dom}(F))$.

- *El ítem 3, indica que la situación descrita en la figura 2.2 no se puede presentar.*

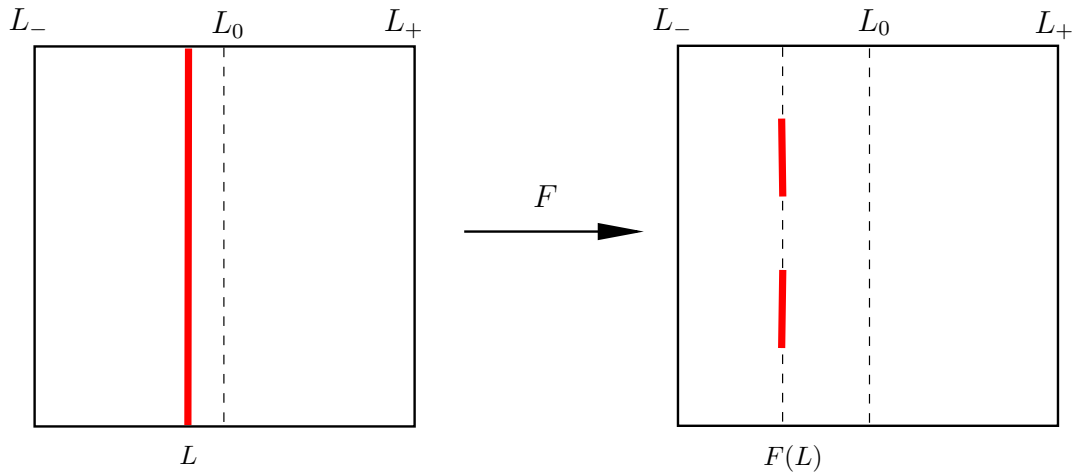


Figura 2.2: $F/L : L \rightarrow f(L)$ no es continúa.

Denotamos por $T\Sigma$ el fibrado tangente de Σ . Dado $x \in \Sigma$, $\alpha > 0$, y un subespacio 1-dimensional $V_x \subset T_x\Sigma$, así mismo por $C_\alpha(x, V_x) \equiv C_\alpha(x)$ un cono en $T_x\Sigma$, con inclinación α entorno a V_x esto es,

$$C_\alpha(x) = \{v_x \in T_x\Sigma : \angle(v_x, V_x) \leq \alpha\}$$

Un campo de conos C_α , es llamado transversal a una foliación vertical \mathcal{F} en Σ , si T_xL no esta contenido en $C_\alpha(x)$, para todo $x \in L$ y toda folia $L \in \mathcal{F}$.

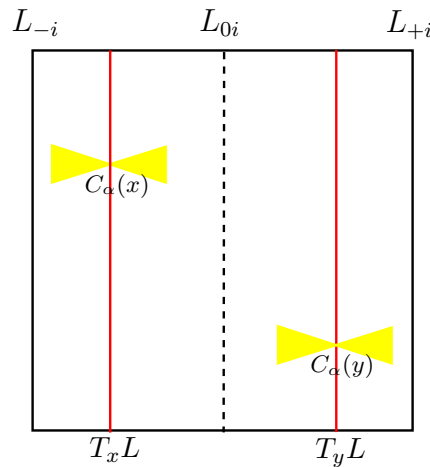


Figura 2.3: Campo de conos C_α transversal a la foliación.

Definición 7 Sea $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular que tiene asociada una foliación vertical \mathcal{F} , y $\lambda > 0$ fijo. Se dice que F es λ -hiperbólico, si existe un campo de conos C_α en Σ tal que:

(1) C_α es transversal a \mathcal{F} .

(2) Si $x \in \text{Dom}(F)$ y F es diferenciable en x , entonces

$$DF(x)(C_\alpha(x)) \subset \text{Int}(C_{\alpha/2}(F(x)))$$

$$\| DF(x).v_x \| \geq \lambda \cdot \| v_x \|,$$

para todo $v_x \in C_\alpha(x)$.

Observación 6 Se observa que la condición (2), no establece ninguna relación entre los subespacios que originan los respectivos conos.

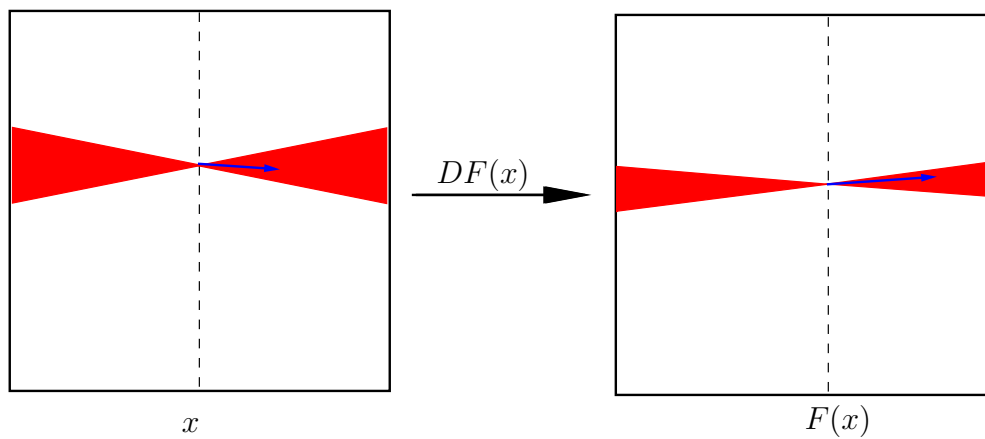


Figura 2.4: Campo de conos.

2.1. Hipótesis (H1) y (H2)

Estas hipótesis están motivadas de cierta forma, en el comportamiento del flujo, de ahí que ellas pretenden describir de una forma muy similar, diferentes situaciones que analíticamente pueden ocurrir. Por estas razones, en la presente sección, se muestra mediante las diferentes figuras, las ideas que geoméricamente están implícitas en el planteamiento de estas hipótesis.

Definición 8 Dado $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular tal que $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$, para toda $L \in \mathcal{F}$ contenida en el $\text{Dom}(F)$, se define el número $n(L)$ como:

(1) Si $F(L) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, se define $n(L) = 0$.

(2) Si $F(L) \subset L_- \cup L_+$, se define:

$$n(L) = \sup\{n \geq 1 : F^i(L) \subset \text{Dom}(F) \text{ y } F^{i+1}(L) \subset L_- \cup L_+ \text{ siempre que } 0 \leq i \leq n-1\}$$

Definición 9 Dado $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular tal que $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$, se dice que F satisface:

(H1) Si para toda $L \in \mathcal{F}$, tal que $L \subset \text{Dom}(F)$ y $n(L) = 0$, existe una vecindad \mathcal{F} -saturada S de L en Σ , tal que el mapa F/S es C^1 .

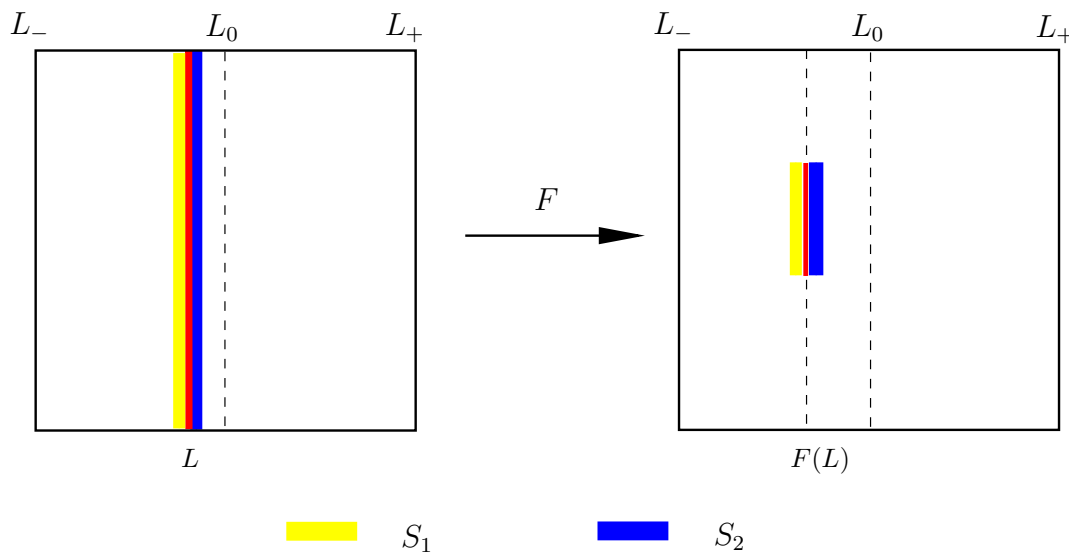


Figura 2.5: Hipótesis **(H1)** con $L \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, $S \setminus L = S_1 \cup S_2$.

Observación 7 Como $L \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, entonces la vecindad $S \setminus L$, tiene dos componentes conexas S_1 y S_2 , como F es continua en S , entonces $F(S)$ es conexa en Σ , es decir no hay rompimiento de la imagen de S , esto es la vecindad S , acompaña a la folia L en su primer iterado. Si $L \subset (L_- \cup L_+)$, entonces S tendrá solo una componente conexa S_1 si $L \subset L_+$, o S_2 si $L \subset L_-$. Ver figuras 2.5 y 2.6.

(H2) Si para cada $L_* \in \mathcal{F}$ tal que $L_* \subset \text{Dom}(F)$, $1 \leq n(L_*) < \infty$ y

$$F^{n(L_*)}(L_*) \subset \text{Dom}(F)$$

existe una vecindad conexa $S \subset \text{Dom}(F)$ de L_* , tal que las componentes conexas S_1, S_2 de $S \setminus L_*$ (posiblemente iguales si $L_* \subset L_- \cup L_+$), satisfacen las siguientes propiedades.

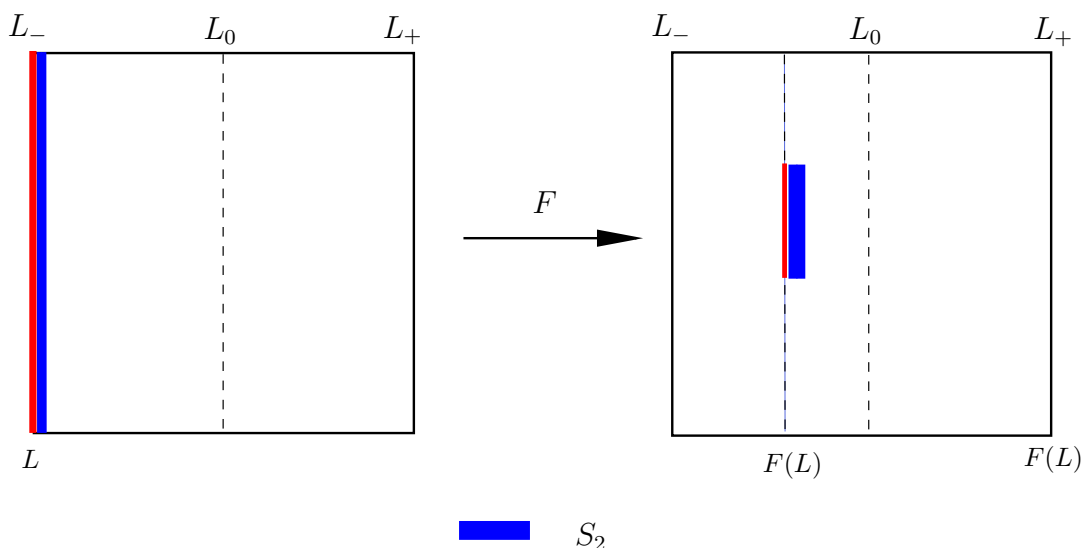


Figura 2.6: Hipótesis **(H1)** con $L \subset L_- \cup L_+$, $S \setminus L = S_2$.

1. Tanto $F(S_1)$ y $F(S_2)$ están contenidas en $\Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.
2. Para $j \in \{1, 2\}$, existe un número $n^j(L_*)$, tal que $1 \leq n^j(L_*) \leq n(L_*) + 1$, y si y_l es una sucesión convergiendo a $y \in L_*$, entonces $F(y_l)$ es una sucesión convergiendo a $F^{n^j(L_*)}(y)$. Si $n^j(L_*) = 1$, entonces F es C^1 , en $S_j \cup L_*$.
3. Si $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ ($S_1 \neq S_2$), entonces $n^1(L_*) = 1$ y $n^2(L_*) > 1$, o $n^1(L_*) > 1$ y $n^2(L_*) = 1$.

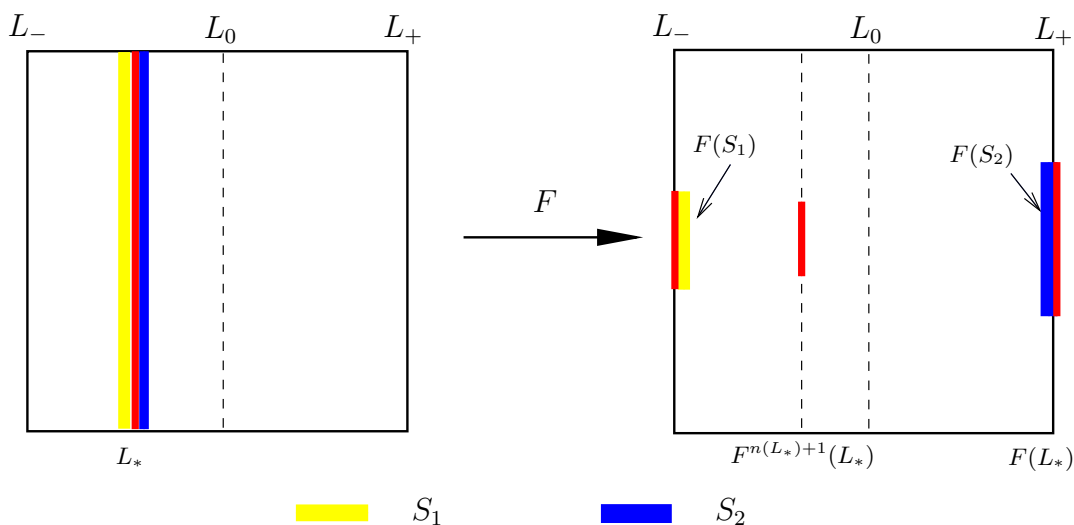


Figura 2.7: **(H2)**, con $L \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, $n^2(L_*) = 1$ y $1 < n^1(L_*) < n(L_*) + 1$.

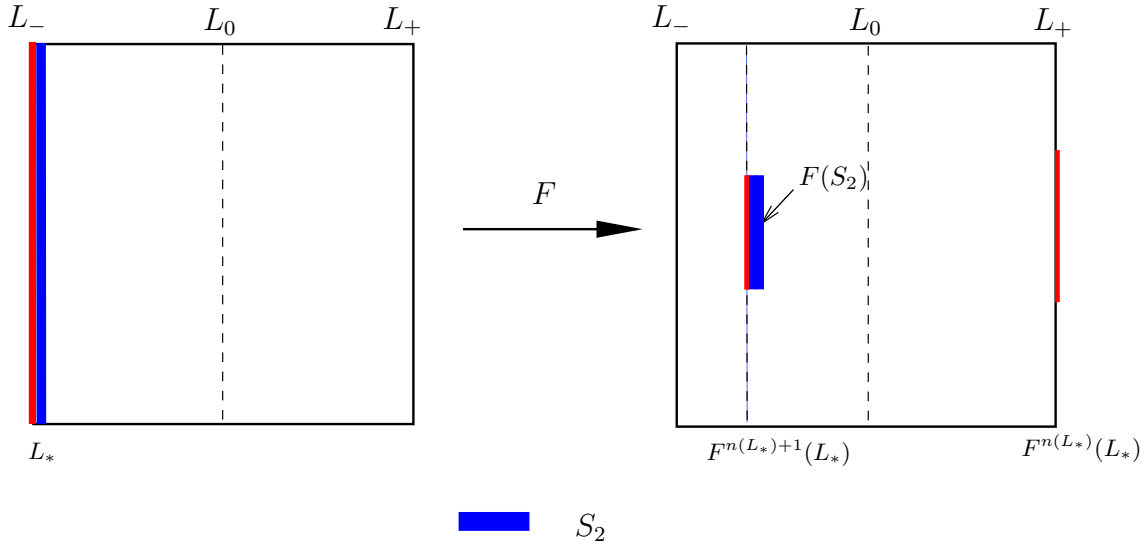


Figura 2.8: Hipótesis **(H2)**, con $L \subset L_- \cup L_+$, $n^2(L_*) = n(L_*) + 1$.

Observación 8 La hipótesis **(H2)**, garantiza que si $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, de cierta forma hay un rompimiento de sus componentes $S \setminus L_*$, es decir, que una de las dos componentes debe acompañar a la folia L_* en su primer iterado; mientras que la otra componente regresa a Σ en un iterado finito, a lo más regresa cuando $F(L_*) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, es decir en el $n(L_*) + 1$ iterado. Es claro por la condición (2), que F es C^1 , solo en la vecindad que acompaña a la folia en su primer iterado.

En la figura 2.7, se observa que: $F(S_2) \subset \Sigma$ en el primer iterado de L , por la condición (2) de **(H2)**, se tiene que F es C^1 en $S_2 \cup L_*$; mientras que $F(S_1) \subset \Sigma$ en el iterado $n^1(L_*)$, donde $1 < n^1(L_*) < n(L_*) + 1$, esto es, $F(S_1)$ regresa a Σ , antes que $F(L_*) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$. Por lo tanto, si $\{x_j\} \subset S_2$, y $x_j \rightarrow L_*$, entonces $F(x_j) \rightarrow F(L_*)$; análogamente si $\{y_j\} \subset S_1$ y $y_j \rightarrow L_*$, entonces $F(y_j) \rightarrow F^{n(L_*)}(L)$.

Si $L_* \subset L_- \cup L_+$, se tienen dos posibilidades, que la vecindad (S_2 si $L \subset L_-$ o S_1 si $L \subset L_+$) quede contenida en Σ en el primer iterado, o que regrese a lo más en el $n(L) + 1$ iterado. En la figura 2.8, se tiene que la vecindad S_2 de L_* , no acompaña a la folia L_* en su primer iterado, en este caso, $F(S_2) \subset \Sigma$ en el $n(L_*) + 1$ iterado L_* ; luego, si $\{y_j\} \subset S_2$, entonces $F(y_j) \rightarrow F^{n(L_*)+1}(L)$.

A partir de las hipótesis establecidas se tienen las siguientes implicaciones:

Lema 8 Dado $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ un mapa triangular y \mathcal{F} su foliación vertical asociada, Si $L \in \mathcal{F}$ y $L \subset \text{Dom}(F)$, entonces:

(1) Si F no tiene puntos periódicos, y $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$, entonces

$$n(L) \leq 2k.$$

(2) $n(L) = 0$, si y sólo si $F(L) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.

(3) $F^i(L) \subset L_- \cup L_+$, para todo $1 \leq i \leq n(L)$.

(4) Si $F^{n(L)}(L) \subset \text{Dom}(F)$, entonces $F^{n(L)+1}(L) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.

El Lema 8 es consecuencia directa de la definición de $n(L)$.

Definición 10 Dado $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ un mapa triangular, con \mathcal{F} su foliación asociada, y $f : \text{Dom}(f) \subset SL \rightarrow SL$ su mapa 1-dimensional asociado. Entonces definimos:

(1) $\mathcal{V} = \{f(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset \text{Dom}(F) \text{ y } B \subset L_- \cup L_+\}$.

(2) $\mathcal{L}_- = \bigcup \{f(L_{0i-}) : i \in \{1, \dots, k\} \text{ y } f(L_{0i-}) \text{ existe}\}$.

(3) $\mathcal{L}_+ = \bigcup \{f(L_{0i+}) : i \in \{1, \dots, k\} \text{ y } f(L_{0i+}) \text{ existe}\}$.

Lema 9 Dado $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular que satisface la hipótesis **(H2)** y \mathcal{F} su foliación asociada. Si $L_* \in \mathcal{F}$, $L_* \subset \text{Dom}(F)$, $1 \leq n(L_*) < \infty$ y

$$F^{n(L_*)}(L_*) \subset \text{Dom}(F),$$

Entonces:

(1) Si $L_* \subset L_-$, entonces $f(L_*+)$ existe.

(2) Si $L_* \subset L_+$, entonces $f(L_*-)$ existe.

(3) Si $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, entonces, tanto $f(L_*+)$ y $f(L_*-)$ existen. En este caso $f(L_*+) \neq f(L_*-)$, y solo uno de ellos es $f(L_*)$.

En cada caso el limite correspondiente pertenece a:

$$L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$$

Demostración. Para probar (1), se observa que si $L_* \subset L_-$, la hipótesis **(H2)** implica que existe una sola componente S ubicada a la derecha de L_* , luego $f(L_*+) = f^{n^1(L_*)}(L_*)$, donde $n^1(L_*)$ esta dado en la afirmación de la hipótesis **(H2)**. Notemos además que $1 \leq n^1(L_*) \leq n(L_*) + 1$ y luego $f(L_*+) \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$. Análogamente se tiene para el caso en que $L_* \subset L_+$.

Si $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, entonces $S_1 \neq S_2$, sin pérdida de generalidad asumamos que, $n^1(L_*) = 1$ y $n^2(L_*) > 1$; luego por la condición (2) de la hipótesis **(H2)**, tenemos que $f(L_*+) = f(L_*)$ y $f(L_*-) = f^{n^2(L_*)}(L_*)$, como F es inyectiva, entonces, $f(L_*+) \neq f(L_*-)$. ■

Lema 10 *Dado $F : Dom(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular que satisface la hipótesis **(H1)** y \mathcal{F} su foliación asociada. Si $L \in \mathcal{F}$ y $L \subset D(F)$, entonces $F(L) \subset L_- \cup L_+$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $L \subset Dom(F)$ y $F(L) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$; luego $n(L) = 0$, y entonces por la hipótesis **(H1)** existe una vecindad de L en Σ en la cual F es C^1 . En particular, F es continua en L contradicción. ■

Lema 11 *Sea $F : Dom(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular que satisface las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, y \mathcal{F} su foliación asociada. Si F no tiene puntos periódicos, y $L_- \cup L_+ \subset Dom(F)$, entonces $Dom(F) \setminus D(F)$ es \mathcal{F} -saturado y abierto en $Dom(F)$. Además $F/(Dom(F) \setminus D(F))$ es C^1 .*

Demostración. Como unión arbitraria de abiertos es abierto, entonces es suficiente demostrar que para un $x \in Dom(F) \setminus D(F)$, existe una vecindad S de \mathcal{F}_x en Σ , tal que F/S es C^1 . Fijemos un $x \in Dom(F) \setminus D(F)$, como $Dom(F)$ es \mathcal{F} -saturado se tiene que existe $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_x \subset Dom(F)$ y por lo tanto $n(\mathcal{F}_x)$ esta bien definido. Por el Lema 8 tenemos que $n(\mathcal{F}_x) < \infty$, dado que F no tiene puntos periódicos.

Si $n(\mathcal{F}_x) = 0$ entonces la vecindad S , dada por **(H1)** verifica F/S es C^1 .

Si $n(\mathcal{F}_x) \geq 1$ definimos $L_* = \mathcal{F}_x$; de la definición de $n(\mathcal{F}_x)$ tenemos que $F^{n(L_*)}(L_*) \subset L_- \cup L_+$, por hipótesis, $L_- \cup L_+ \subset Dom(F)$ y así $F^{n(L_*)}(L_*) \subset Dom(F)$, luego por **(H2)** podemos escoger la vecindad.

Claramente $L_* \subset L_- \cup L_+$, pues de lo contrario $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, y así S/L_* tendría dos componentes conexas S_1 y S_2 . Por la afirmación (2), de **(H2)** podemos asumir que $n^1(L_*) > 1$, escogemos una sucesión $\{x_j^1\} \subset S_1$ tal que $x_j^1 \rightarrow x$, entonces $F(x_j^1) \rightarrow F^{n^1(L_*)}(x)$. Como F es continua en x entonces $F(x_j^1) \rightarrow F(x)$ y luego

por unicidad del límite $F^{n^1(L_*)}(x) = F(x)$, esto es $F^{n^1(L_*)-1}(x) = x$, por que F es inyectiva y luego x es un punto periódico, claramente $n^1(L_*) - 1 \geq 1$, lo cual contradice la no existencia de órbitas periódicas. Esto muestra que $L_* \subset L_- \cup L_+$ de ahí que $S \setminus L_*$ tiene una única componente conexa, para esta componente $n^1(L_*) = 1$, aquí F es continua, entonces F/S es C^1 por la condición (2) de **(H2)**. ■

Lema 12 *Sea $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, un mapa triangular que satisface las hipótesis **(H1)** y **(H2)**. Si F no tiene puntos periódicos, y $\text{Dom}(F) = \Sigma \setminus L_0$, entonces $\text{Dom}(F) \setminus D(F)$ es abierto en Σ .*

Demostración. Como $L_0 = \cup_{i=1}^k L_{0i}$ (es unión finita de elementos de Σ), luego L_0 es cerrado en Σ , por lo tanto $\text{Dom}(F) = \Sigma \setminus L_0$ es abierto. Como $L_- \cup L_+ \subset \Sigma \setminus L_0 = \text{Dom}(F)$, y F no tiene puntos periódicos, por el lema anterior tenemos que $\text{Dom}(F) \setminus D(F)$ es abierto en Σ . ■

2.2. Mapas triangulares con dominio principal

En esta sección $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, es un mapa triangular λ -hiperbólico que satisface **(H1)** y **(H2)** con $\lambda > \sqrt{2}$, asumiremos que $\text{Dom}(F) = \Sigma \setminus L_0$, \mathcal{F} y C_α su foliación y campo de cono asociado, respectivamente.

Denotaremos por $<$ el orden natural en el espacio de folias I_i de \mathcal{F} , donde \mathcal{F}_i es una foliación vertical in Σ_i ($i = 1, \dots, k$). Una banda vertical en Σ es una región entre dos curvas verticales L, L' en la misma componente Σ_i de Σ . La notación $[L, L']$ y (L, L') indica una banda vertical cerrada y abierta respectivamente. Si c es una curva en Σ denotaremos por c_0 y c_1 sus puntos finales. Denotaremos por $Cl(c) = c \cup \{c_0, c_1\}$. Decimos que c es tangente a C_α si $c'(t) \in C_\alpha(c(t))$ para todo $t \in \text{Dom}(c)$. Una C_α -espinas de una banda vertical $[L, L'], (L, L'), [L, L'), (L, L']$ es una curva $c \subset [L, L']$ tangente a C_α tal que $\{c_0, c_1\} \subset L \cup L'$ y $\text{Int}(c) \subset (L, L')$.

Definición 11 *Un subconjunto B de Σ es \mathcal{F} -discreto si este corresponde a un conjunto de folias cuyos únicos puntos de acumulación son las folias de L_0 . Esto es, para cada vecindad U \mathcal{F} -invariante de L_0 en Σ , el conjunto de folias $\{L \in \mathcal{F} : L \subset (B \setminus U)\}$ es finito.*

Lema 13 *Si F no tiene puntos periódicos, entonces:*

(1) $D(F)$ es \mathcal{F} -discreto.

(2) Si $i \in \{1, \dots, k\}$ y $D(F) \cap [L_{0i}, L_{+i}]$ consiste de un número infinito de folias, entonces $f(L_{0i+})$ existe.

(3) Si $i \in \{1, \dots, k\}$ y $D(F) \cap [L_{-i}, L_{0i}]$ consiste de un número infinito de folias, entonces $f(L_{0i-})$ existe.

Demostración. Primero demostremos (1). Supongamos que $D(F)$ no es \mathcal{F} -discreto. Entonces, existe una vecindad U de L_0 en Σ tal que $D(F) \setminus U$ contiene infinitas folias L_n . El lemma 11 implica que $D(F)$ es cerrado en $Dom(F) = \Sigma \setminus L_0$, luego $D(F) \setminus U$ es cerrado en $Dom(F) \setminus U$ con U vecindad abierta de L_0 y $Dom(F) = \Sigma \setminus L_0$, de ahí que $Dom(F) \setminus U$ es compacto en Σ . Por lo tanto $D(F) \setminus U$ es compacto también. Sin pérdida de generalidad asumamos que L_n converge a una folia L_* de \mathcal{F} en $D(F) \setminus U$ tal que $L_n \cap L_* = \emptyset$ para todo n . Como $L_* \subset D(F)$, por el Lema 10 tenemos que $F(L_*) \subset L_- \cup L_+$, así $n(L_*) \geq 1$, como $L_- \cup L_+ \subset Dom(F)$ y F no tiene puntos periódicos entonces $1 \leq n(L_*) < \infty$, luego $f^{n(L_*)} \subset L_- \cup L_+ \subset Dom(F)$. Por la condición (2) de la hipótesis **(H2)** podemos escoger una vecindad S de L_* en Σ , como $L_n \rightarrow L_*$ y $L_n \cap L_* = \emptyset$ podemos asumir que $L_n \subset S \setminus L_*$ para todo n . Como $F(S) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ por la condición (1) de la hipótesis **(H2)** entonces $F(L_n) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ para todo n , contradicción pues, $L_n \subset D(F)$ por el Lema 10 tenemos que $F(L_n) \subset L_- \cup L_+$.

Fijemos $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $D(F) \cap [L_{0i}, L_{+i}]$ consiste de un número finito de folias. Como $Dom(F \setminus \Sigma_i) = \Sigma_i \setminus L_{0i}$, existe una folia $B > L_{0i}$ en I_i tal que $(L_{0i}, B] \subset Dom(F) \setminus D(F)$. Esto implica que f es continua en $(L_{0i}, B]$, y además monótona, pues de lo contrario existirían dos folias diferentes, $L, L' \subset (L_{0i}, B]$ construyendo una banda $[L, L']$ tal que $f(L) = f(L') = L''$. Sea c una C_α -espina de $[L, L']$. Entonces $c \subset Dom(F) \setminus D(F)$ y por el Lema 11 tenemos que F es C^1 en c . Por lo tanto, $F(c)$ es una curva transversal a \mathcal{F} intersectando a la folia L'' al menos dos veces, contradicción, luego $f \setminus (L_{0i}, B]$ es monótona y por lo tanto $f(L_{0i+})$ existe. Análogamente tenemos para (3). ■

Lema 14 Dada $c \subset Dom(F) \setminus D(F)$ una curva abierta y transversal a \mathcal{F} . Si existe $n \geq 1$ y una curva c^* abierta y C^1 con clausura $Cl(c^*) \subset c$ tal que $F^i(c^*) \subset Dom(F) \setminus D(F)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$ y $F^n(c^*)$ cubre c , entonces F tiene un punto periódico.

Demostración. Por el Lema 11, tenemos que $Dom(F) \setminus D(F)$ es \mathcal{F} -saturado y $F/_{Dom(F) \setminus D(F)}$ es C^1 . Entonces, c y c^* proyectado (via \mathcal{F}) en dos intervalos en SL denotados por c y c^* respectivamente. Por hipótesis tenemos que $f^i(c^*)$ esta definido para todo $0 \leq i \leq n-1$ y $f^n(c^*) \supset c \supset CL(c^*)$. Entonces, f^n tiene un punto fijo L_{**} . Como $F^n(L_{**}) \subset f(L_{**}) = L_{**}$ y F/L_{**} es continua, el teorema del punto fijo de Bower, implica que F^n tiene un punto fijo. El punto fijo representa un punto periódico de F . ■

Lema 15 *F lleva una curva $c \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ tangente a C_α (con longitud $|c|$) en una curva tangente a C_α (con longitud $\geq \lambda|c|$).*

Demostración. Dada $c : \text{Dom}(c) \rightarrow \text{Dom}(c) \setminus D(F)$ una curva tangente a C_α . Si $t \in \text{Dom}(c)$ y $c'(t) \in C_\alpha(c(t))$, entonces $DF(c(t))c'(t) \in C_\alpha(F(c(t)))$ pues F es un mapa triangular entonces:

$$DF(c(t))(C_\alpha(c(t))) \subset \text{Int}(C_{\alpha/2}(F(c(t))))$$

Como:

$$|F \circ c| = \int_{\text{Dom}(c)} \|DF(c(t))c'(t)\| dt \geq \int_{\text{Dom}(c)} \lambda \cdot \|c'(t)\| dt = \lambda \cdot |c|.$$

■

Lema 16 *Supongamos que F no tiene puntos periódicos. Dadas L, L' folias diferentes en $D(F)$ tal que la banda vertical $(L, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$. Si c es una C_α -espina de (L, L') , entonces $F(\text{Int}(c))$ cubre una banda vertical (W, W') con*

$$W, W' \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumamos que $L < L'$. Por el Lema 11 tenemos que $F/(L, L')$ es C^1 pues $(L, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$; además el Lema 10 implica que

$$F(L), F(L') \subset L_- \cup L_+ \tag{2.1}$$

por que $L, L' \subset D(F)$, así $n(L)$ y $n(L')$ están bien definidos. Por (2.1) y el lema 8(1) $1 \leq n(L), n(L') < \infty$, pues F no tiene puntos periódicos y $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$ análogamente

$$F^{n(L)}(L), F^{n(L')}(L') \subset \text{Dom}(F)$$

Aquí tenemos 3 posibilidades, $L \subset L_-$ y $L' \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, $L, L' \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ y $L \subset L_+$. Entonces por el Lema 9, tenemos que $f(L_+), f(L'_-) \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$. Sea c una C_α -espina de (L, L') . Como $\text{Int}(c) \subset (L, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ tenemos que $F(\text{Int}(c))$ esta definida. Como $F/(L, L')$ es C^1 , entonces $F(\text{Int}(c))$ es una curva cuyos puntos fronteras deben estar contenidos en $f(L_+), f(L'_-)$. Claramente $f(L_+) \neq f(L'_-)$ por que F preserva \mathcal{F} . Entonces, $\mathcal{F}_{F(\text{Int}(c))} = (W, W')$ es una banda vertical con $W = f(L_+)$ y $W' = f(L'_-)$. Por lo tanto $W, W' \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$.

■

Lema 17 *Supongamos que F no tiene puntos periódicos. Para cada curva abierta $c \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ tangente a C_α existe una curva abierta $c^* \subset c$ y $n'(c) > 0$ tal*

que $F^j(c^*) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ para todo $0 \leq j \leq n'(c) - 1$ y $F^{n'(c)}(c^*)$ cubre una banda (W, W') con

$$W, W' \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{L}_- \cup \mathcal{L}_+.$$

Demostración. Dada una curva $c \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ tangente a C_α . Para cada curva abierta $c' \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ tangente a C_α definimos

$$N(c') = \sup\{n \geq 1 : F^j(c') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F) \text{ para todo } 0 \leq j \leq n - 1\}$$

$N(c')$ esta bien definido, pues Σ tiene diámetro finito, y como $\lambda > 1$ por el lema 15 tenemos que F lleva curva de longitud $|c|$ en curvas de longitud $\geq \lambda|c|$. Además $F^{N(c)}(c')$ es una curva tangente a C_α con

$$F^{N(c)}(c') \cap (D(F) \cup L_0) \neq \emptyset$$

porque $\text{Dom}(F) = \Sigma \setminus L_0$. Definamos el número β por

$$\beta = (1/2)\lambda$$

Entonces, $\beta > 1$ pues $\lambda > 2$. Definamos $c_1 = c$ y $N_1 = N(c_1)$. Si $F^{N_1}(c_1)$ interseca $D(F) \cup L_0$ en una única folia L_1 , entonces $F^{N_1}(c_1) \cap L_1$ tiene un único punto p_1 . En este caso definimos

- c_2^* como la mayor componente conexa de $F^{N_1}(c_1) \setminus \{p_1\}$ y
- $c_2 = F^{-N_1}(c_2^*)$.

La siguiente propiedades se tienen,

- (1) $c_2 \subset c_1$ y entonces c_2 es una curva abierta tangente a C_α .
- (2) $F^j(c_2) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$, para todo $0 \leq j \leq N_1$.
- (3) $|F^{N_1}(c_2)| \geq \beta \cdot |c_1|$.

En efecto, la primera propiedad se sigue porque $F^{N_1}/\mathcal{F}_{c_2}$ es inyectivo y C^1 . La segunda se tiene por la definición de $N_1 = N(c_1)$ y del hecho que $c_2^* = F^{N_1}(c_2)$ no interseca a ninguna folia en $D(F) \cup L_0$. La tercera se sigue del Lema 15 porque

$$|F^{N_1}(c_2)| = |c_2^*| \geq (1/2) \cdot |F^{N_1}(c_1)| \geq (1/2) \cdot \lambda^{N_1} |c_1| \geq (1/2) \cdot \lambda |c_1| = \beta \cdot |c_1|$$

Luego definimos $N_2 = N(c_2)$. La segunda propiedad implica $N_2 > N_1$. Análogamente, si $F^{N_2}(c_2)$ interseca a $D(F) \cup L_0$ en única folia L_2 , entonces $F^{N_2}(c_2) \cap L_2$ tiene una única punto p_2 . En cuyo caso definimos

- c_3^* = la mayor componente conexa de $F^{N_1}(c_1) \setminus \{p_1\}$ y
- $c_3 = F^{-N_2}(c_3^*)$.

Al igual que el caso anterior tenemos;

- (1) $c_3 \subset c_2$ y entonces c_3 es una curva abierta tangente a C_α .
- (2) $F^j(c_3) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$, para todo $0 \leq j \leq N_2$.
- (3) $|F^{N_2}(c_3)| \geq \beta^2 \cdot |c_1|$.

Siguiendo la construcción de manera inductiva tenemos una sucesión $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_l < \dots$ de enteros positivos y una sucesión $c_1, c_2, c_3, \dots, c_l, \dots$ de curvas abiertas en c tal que se verifican las siguientes propiedades, para $l \geq 1$:

- (1) $c_{l+1} \subset c_l$ y entonces c_{l+1} es una curva abierta tangente a C_α .
- (2) $F^j(c_{l+1}) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$, para todo $0 \leq j \leq N_l$.
- (3) $|F^{N_l}(c_{l+1})| \geq \beta^l \cdot |c_1|$.

Como Σ tiene diámetro finito, la secuencia c_l debe ser finita, luego existe un primer entero l_0 tal que $F^{N(c_{l_0})}(c_{l_0})$ interseca $D(F) \cup L_0$ en dos folias diferentes L, L' . Claramente esas dos folias deben estar contenida en una misma componente de Σ pues F es continua y así $F^{N(c_{l_0})}(c_{l_0})$ es conexa. Por lo tanto la banda vertical (L, L') definida por L y L' esta bien definida. Nosotros podemos asumir que $(L, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ porque $D(F)$ es \mathcal{F} -discreto. Tomando $c^{**} = c_{l_0}$ y $n''(c) = N_{l_0}$ tenemos el resultado.

Ahora finalizaremos la prueba del Lema 17. Dado c^{**} , $n''(c)$ y $L, L' \subset D(F) \cup L_0$ como en la afirmación 1. Nosotros tenemos tres posibilidades: $L, L' \subset D(F)$; $L \subset L_0$ y $L' \subset D(F)$; $L \subset D(F)$ y $L' \subset L_0$.

Asumamos que $L, L' \subset D(F)$. Como $F^{n''(c)}(c^{**})$ es tangente a C_α , y cubre (L, L') , nosotros podemos asumir que $F^{n''(c)}(c^{**})$ es una C_α -espina de (L, L') . Entonces, aplicando el Lema 16 a esta espina, tenemos que $F^{n''(c)+1}(c^{**})$ cubre una banda vertical (W, W') con

$$W, W' \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V}$$

En este caso $c^* = c^{**}$ y $n'(c) = n''(c) + 1$ satisfacen la conclusión del Lema 17. Ahora asumamos que $L \subset L_0$ y $L' \subset D(F)$. Como $L \subset L_0$ nosotros tenemos que $L = L_{0i}$

para algún $i = 1, \dots, k$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $L_{0i} < L'$. Luego $(L_{0i}, L') = (L, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ y entonces $D(F) \cap [L_{0i}, L'] = \emptyset$. Luego el Lema 13(2) implica que $D(F) \cap [L_{0i}, L']$ consiste de un número finito de folias, y por lo tanto $f(L_{0i}+)$ existe, consecuentemente

$$f(L_{0i}+) \in \mathcal{L}_+$$

Por otro lado, dado que $L' \subset D(F)$ entonces $F(L') \subset L_- \cup L_+$. Se sigue que $1 \leq n(L')$ y además $n(L') \leq 2k$ dado que F no tiene puntos periódicos y $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$. Como $F^{n(L')}(L') \subset L_- \cup L_+$ tenemos que

$$F^{n(L')}(L') \subset \text{Dom}(F).$$

Claramente $L' \not\subset L_-$ por que $L_{0i} < L'$. Entonces, el Lema 10 implica que $f(L'_-)$ existe y satisface

$$f(L'_-) \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{L}$$

Pero $F((L_{0i}, L'))$ y (Luego $F(F^{n''(c)}(c^{**}))$) cubre $(f(L_{0i}+), f(L'_-))$ aquí $(L_{0i}, L') \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$. Tomando $W = f(L_{0i}+)$ y $W' = f(L'_-)$ conseguimos

$$W, W' \subset (L_- \cup L_+) \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{L}_+$$

Entonces, $F(F^{n''(c)}(c^{**}))$ cubre (W, W') como en la afirmación. Escogiendo $c^* = c^{**}$ y $n'(c) = n''(c) + 1$. ■

Finalmente tenemos los elementos para demostrar nuestro resultado principal de este capítulo.

Teorema 18 *Dado F un mapa triangular λ -hiperbólico que satisface (H1) y (H2) con $\lambda > 2$ y $\text{Dom}(F) = \Sigma \setminus L_0$. Entonces F tiene un punto periódico.*

Demostración. Asumamos que F no tiene puntos periódicos. Como $L_- \cup L_+ \subset \text{Dom}(F)$. Entonces todos los resultados del presente capítulo aplican. En particular tenemos que $\text{Dom}(F) \setminus D(F)$ es abierto en Σ y $D(F)$ es \mathcal{F} -discreto. Esto implica que $\text{Dom}(F) \setminus D(F)$ es abierto y denso en Σ .

Dada \mathcal{B} familia de bandas verticales abiertas de la forma (W, W') .

$$W, W' \subset L_- \cup L_+ \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{L}_- \cup \mathcal{L}_+.$$

Es claro que $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_M\}$ es un conjunto finito. En \mathcal{B} definimos la relación $B \leq B'$ si y solo si existe una curva abierta $c \subset B$ tangente a C_α con $Cl(c) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F)$ y una curva abierta $c^* \subset c$ y $n(c) > 0$ tal que

$$F^j(c^*) \subset \text{Dom}(F) \setminus D(F) \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq n-1$$

y $F^n(c^*)$ cubre B' .

Construimos la cadena

$$B_{j_1} \leq B_{j_1} \leq B_{j_2} \leq \cdots ,$$

con $j_i \in \{1, \dots, m\}$ y $j_1 = 1$. Como \mathcal{B} es finito existirá una subcadena

$$B_{j_i} \leq B_{j_{i+1}} \leq \cdots \leq B_{j_{i+s}} \leq B_{j_i}.$$

Por lo tanto existirá un entero positivo n tal que $F^n(B_{j_i})$ cubre B_{j_i} . Aplicando el Lema 14 a las curvas adecuadas $c^* \subset Cl(c^*) \subset c \subset B_{j_i}$ obtenemos que F tiene un punto periódico, contradicción. Por lo tanto tenemos que nuestro teorema se cumple.

■

Capítulo 3

Teorema principal

En este capítulo mostraremos nuestro resultado principal “*un sumidero singular hiperbólico de un flujo C^1 sobre una 3-variedad cerrada tiene una órbita periódica*”; para ello, utilizaremos los resultados del capítulo anterior. De ahí, que a partir de las secciones transversales asociadas a singularidades Lorenz-like y de sus respectivos mapas de retorno, construiremos Σ y su mapa triangular asociado.

Asumiremos igualmente que nuestro sumidero singular hiperbólico Λ , contiene singularidades de tipo Lorenz-like, por que en su defecto la Proposición 5 nos garantiza la existencia de órbitas periódicas. Además como nuestra variedad M es compacta, y dado que las singularidades son aisladas entonces tendremos un número finitos de singularidades de tipo Lorenz-like. Dado que las singularidades Lorenz Like, tienen dos autovalores negativos, y como la descomposición en un singular hiperbólico, la dirección contracting es 1-dimensional, entonces asumiremos; la variedad $W^{ss}(\sigma)$ como la variedad tangente al autovalor más negativo, es decir a λ_2 .

3.1. Construcción sección transversal singular

Por el Lema 2 y el Teorema de Hartman Grobman es posible hallar un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) entorno a σ tal que X restringido al dominio de (x_1, x_2, x_3) es un campo vectorial lineal (Ver [ST]), luego podemos describir el flujo alrededor de una singularidad $\sigma \in \Lambda$ (ver figura 3.1).

- Dado que σ es hiperbólico, las variedades estable e inestable, $W_X^s(\sigma)$ y $W_X^u(\sigma)$ existen y son tangentes a σ en los espacios asociados a los valores propios $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ y $\{\lambda_1\}$ respectivamente. En particular, $\dim(W_X^s(\sigma)) = 2$ y

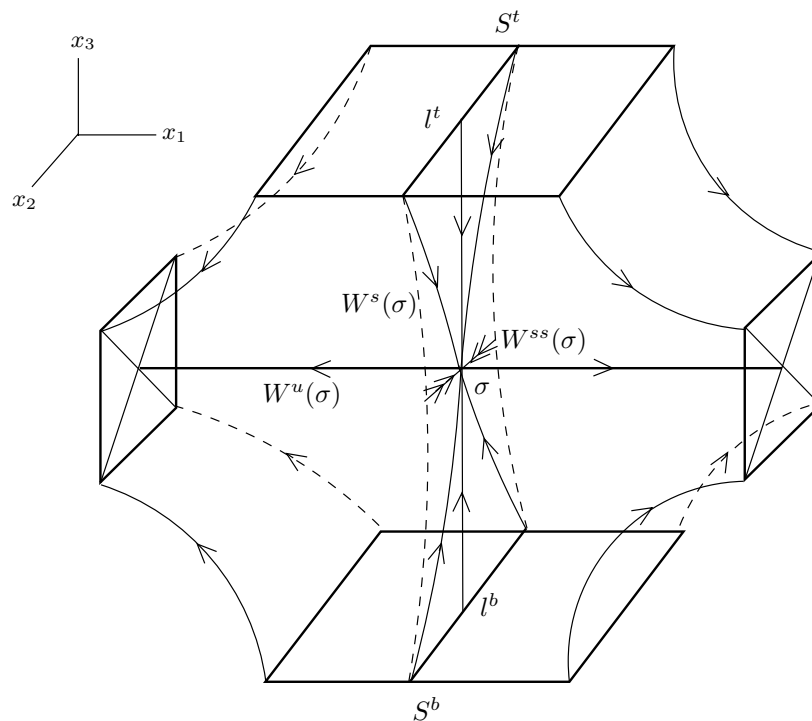


Figura 3.1: Sección transversal asociada a una singularidad Lorenz-Like.

$$\dim(W_X^u(\sigma)) = 1.$$

- La variedad invariante $W_X^{ss}(\sigma)$, esta bien definida y es tangente a σ al espacio asociado a $\{\lambda_2\}$, por lo tanto $\dim(W_X^{ss}(\sigma)) = 1$.
- Notemos que $W_X^{ss}(\sigma)$ separa a $W_X^s(\sigma)$ en dos componentes conexas, una arriba y otra abajo. En la componente superior consideramos una sección transversal S_σ^t de X_t , junto con una curva l_σ^t . Análogamente una sección transversal S_σ^b y una curva l_σ^b en la parte inferior.
- La sección S_σ^* difeomorfa a $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y la curva l_σ^* esta contenida en $W_X^s(\sigma) \setminus W_X^{ss}(\sigma)$ para $* = t, b$.
- Las órbitas a futuro que comienzan en $S_\sigma^t \cup S_\sigma^b \setminus (l_\sigma^t \cup l_\sigma^b)$ exhiben una pequeña vecindad de σ y pasan a través de las tapas S^t y S^b que corresponden a las secciones transversales; las órbitas positivas que empiezan en $l_\sigma^t \cup l_\sigma^b$ van directamente a σ .
- Notemos que la frontera de S_σ^* esta formada por cuatro curvas, dos de ellas transversales a l_σ^* y dos paralelas a l_σ^* . La unión de las curvas en la frontera de l_σ^* , que son paralelas (respectivamente transversales) las denotaremos por $\partial^v S_\sigma^*$ (resp., $\partial^h S_\sigma^*$).

Definición 12 *Las secciones transversales S^t y S^b son llamadas secciones transversales singulares asociadas a σ . Las curvas l^t y l^b son llamadas curvas singulares de S_σ^t y S_σ^b respectivamente.*

Observación 9 *Dado un conjunto Λ sumidero singular hiperbólico de X_t y dado σ una singularidad lorenz-like de X_t en Λ . Entonces, existen secciones transversales singulares asociadas a σ , las cuales están arbitrariamente cerca a σ y satisfacen la siguiente relación.*

$$\Lambda \cap \partial^h S_\sigma^t \cup \partial^h S_\sigma^b = \emptyset.$$

Notaremos por $LSing_X(B)$ el conjunto de singularidades Lorenz-like de X_t en un subconjunto $B \subset M$. Si

$$S = \{S_\sigma^t, S_\sigma^b : \sigma \in LSing_X(\Lambda)\}$$

es una colección formada por secciones transversales singulares $S_\sigma^t, S_\sigma^b, \sigma \in LSing_X(\Lambda)$, entonces definimos

$$S = \bigcup_{\sigma \in LSing_X(\Lambda)} (\partial^h S_\sigma^t \cup \partial^h S_\sigma^b).$$

Definición 13 *Dado Λ un sumidero singular hiperbólico de X_t . Una sección transversal singular de Λ es una colección disjunta*

$$S = \{S_\sigma^t, S_\sigma^b : \sigma \in LSing_X(\Lambda)\}$$

formada por secciones singulares transversales $S_\sigma^t, S_\sigma^b, \sigma \in LSing_X(\Lambda)$, tal que

$$\Lambda \cap \partial^h S = \emptyset.$$

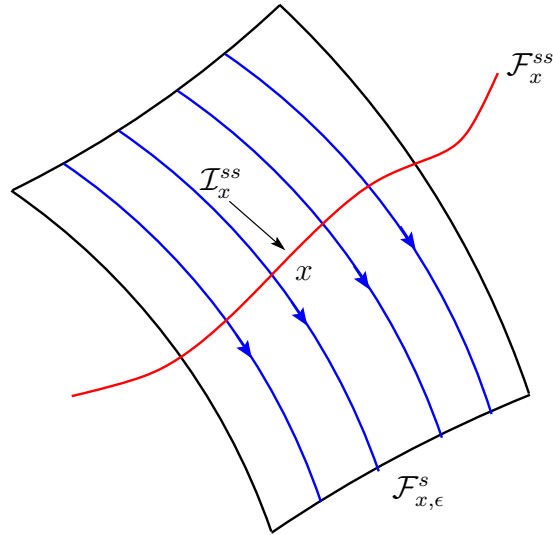
La curva singular de S es la colección de curvas singulares asociadas.

$$l = \{l_\sigma^t, l_\sigma^b : \sigma \in LSing_X(\Lambda)\}$$

3.1.1. Foliación inducida

Supongamos que el conjunto de singularidades en Λ esta dado por $LSing_X(\Lambda) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Ahora procederemos a construir una foliación vertical en cada una de las secciones transversales asociadas a cada singularidad; y así determinar una foliación vertical sobre S . Para ello definimos:

$$X_I(B) = \{X_t(x) : (t, x) \in I \times B\}.$$


 Figura 3.2: $\mathcal{F}_{x,\epsilon}^s$

Dado $\epsilon > 0$ y $x \in U(\Lambda)$ definimos

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon}^s = X_{[-\epsilon,\epsilon]}(\mathcal{I}_x^{ss}),$$

Donde \mathcal{I}_x^{ss} es la variedad estable local de x , esto es, un pequeño intervalo en la folia \mathcal{F}_x^{ss} centrada en x . Si x es regular (i.e. $X(x) \neq 0$), entonces $\mathcal{F}_{x,\epsilon}^s$ es una subvariedad 2-dimensional de M . Si $x \in S$ definimos:

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon}^s = \mathcal{F}_{x,\epsilon}^s \cap S_{\sigma_k}$$

Dado que buscamos una foliación vertical, es decir para evitar que la situación mostrada en la figura 3.3, no se presente, procederemos a refinar la foliación \mathcal{F} sobre cada S_{σ_k} tomando un $\delta_{\sigma_k} > 0$ tal que, las folias asociadas a x_{δ^-} y x_{δ^+} estén contenidas en S_{σ_k} , (ver figura 3.4), esto es:

$$\mathcal{F}_{x_{\delta^-}} \subset S_{\sigma_k} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_{x_{\delta^+}} \subset S_{\sigma_k}$$

Por lo tanto definimos:

$$\partial^v S_{\sigma_k}^*(\delta) = \mathcal{F}_{x_{\delta^-}} \cup \mathcal{F}_{x_{\delta^+}}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ tenemos que:

$$S(\delta) = \{S_\sigma^t(\delta), S_\sigma^b(\delta) : \sigma \in L\text{Sing}_X(\Lambda)\}$$

$S(\delta)$ es una foliación vertical sobre S , y es también una sección singular transversal de Λ . Notemos que S y $S(\delta)$ tienen la misma curva singular l . x_δ^-

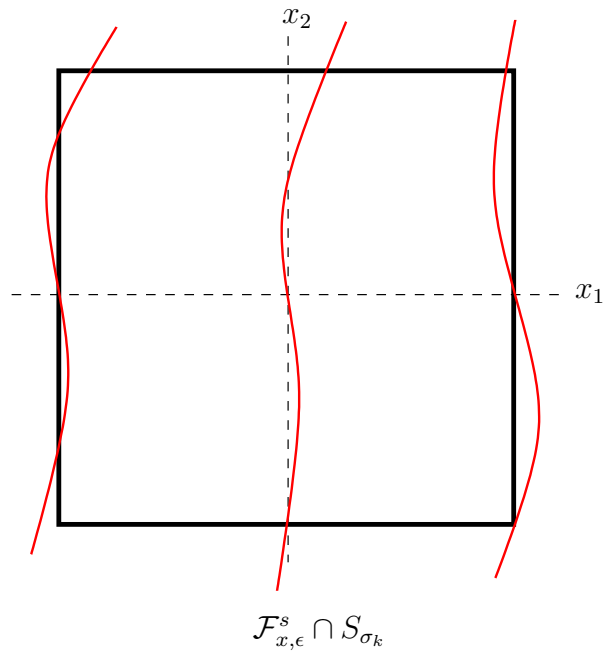


Figura 3.3: Foliación asociada a la sección transversal singular de σ_k .

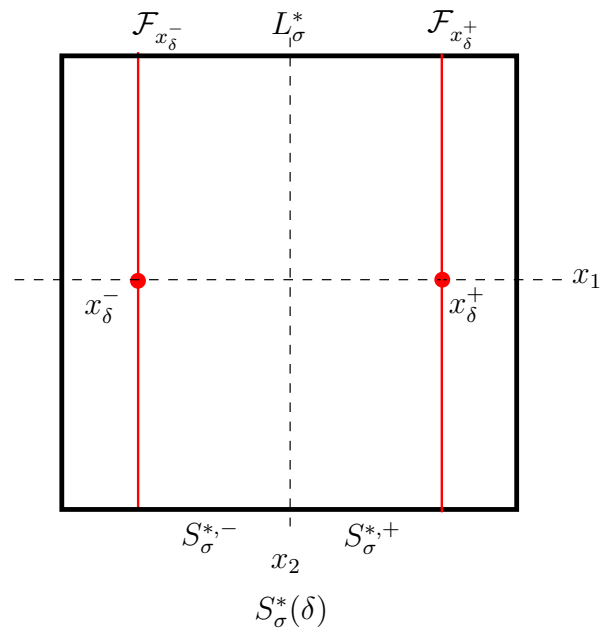


Figura 3.4: Refinamiento de la foliación asociada a la sección transversal singular de σ_k .

3.2. Mapa de retorno

En esta sección probaremos nuestro resultado principal “*un sumidero singular hiperbólico de un flujo X_t de clase C^1 sobre una 3-variedad cerrada tiene una órbita periódica*”, para ello usaremos, los mapas de retorno asociados a secciones singulares transversales, las cuales identificaremos con los mapas triangulares visto en el capítulo II, y por lo tanto, podremos usar los resultados obtenidos en el capítulo anterior. El conjunto Λ representara de aquí adelante un sumidero singular hiperbólico de un flujo X_t de clase C^1 sobre una 3-variedad cerrada.

Asociado a una sección transversal singular S de Λ tenemos un mapa de retorno;

$$\Pi_S : Dom(\Pi) \subset S \rightarrow S,$$

dado por:

$$\Pi(x) = X_{T(x)}(x)$$

donde:

- $Dom(\Pi)$ denota el dominio de Π .
- $T(x)$ es el primer tiempo positivo de retorno de x a S .

Notemos que $Dom(\Pi) \subset S \setminus l$, donde l es la curva singular de S .

Lema 19 *Dado Λ un conjunto sumidero singular hiperbólico de X_t . Dada S la sección transversal singular de Λ con diámetro pequeño y cercano a Λ . Si X_t no tiene órbitas periódicas en Λ , entonces*

$$Dom(\Pi) = S \setminus l$$

Demostación. Dado Λ un sumidero singular hiperbólico de X_t . Asumamos que Λ es conexo, en caso contrario consideramos cada componente conexa por separado. Definamos:

$$Sing^* = Sin(X) \setminus LSing_X(\Lambda)$$

Por el Lema 2 tenemos que si $\gamma \in Sing^*$, entonces γ tiene dos autovalores positivos, sea:

$$W = \bigcup_{\gamma \in Sing^*} W_X^s(\gamma)$$

Luego $W \setminus Sing^*$ consiste de un número finito de órbitas. Además por el lema 2

$$\Lambda \cap (W \setminus Sing^*) = \emptyset$$

Fijemos un bloque positivamente invariante U de Λ . Como las órbitas positivas de los puntos en $W \setminus Sing^*$ converge a $Sing^*$, la relación anterior implica que las órbitas negativas deben salir de U . Dada una sección transversal singular con diámetro pequeño y cerca a Λ . Como $W \setminus Sing^*$ tiene órbitas finitas, podemos asumir que $S \subset U$ y además que S no interseca las órbitas de $W \setminus Sing^*$.

La primera inclusión $Dom(\Pi) \subset S \setminus L$ se tiene de forma inmediata. Dado un $x \in S \setminus L$ fijo, entonces tenemos

$$\omega_X(x) \cap Sing(X) \neq \emptyset \quad (3.1)$$

$$\sigma \in LSing(X) \quad (3.2)$$

Veamos 3.1. Supongamos por contradicción que $\omega_X(x) \cap Sing(X) = \emptyset$. Entonces $\omega_X(x)$ es hiperbólico, luego por el lema de sombreamiento para flujos, podemos encontrar una órbita periódica O de X_t cercana a $\omega_X(x)$. Dado que $x \in S \subset U$ y U es un bloque aislante entonces $\omega_X(x) \subset \Lambda$. En particular, $O \subset \Lambda$, contradicción, por hipótesis Λ no tiene órbitas periódicas, luego 3.1 se verifica.

Veamos (3.2). Supongamos por contradicción que esto no se tiene, esto es $\sigma \notin LSing(X)$. Luego $\sigma \in Sing^*$ y así

$$W_X^{ss}(\sigma) = W_X^s(\sigma)$$

(pues σ tendría dos autovalores positivos). Sea $x \in W_X^s(\sigma)$ ya que x no es una singularidad y S no interseca las órbitas formadas por $W \setminus Sing^*$. Además $x \in S \subset U$, luego $x \in U \setminus W_X^s(\sigma) = U \setminus W_X^{ss}(\sigma)$. Por el Teorema 4, tenemos que σ es Lorenz-like, contradicción, luego se verifica (3.2).

Por lo tanto como S es una sección transversal singular de Λ y $\sigma \in \omega_X(x)$ es Lorenz-like, obtenemos que $x \in Dom(\Pi)$. Luego,

$$S \setminus l \subset Dom(\Pi)$$

Por lo tanto $Dom(\Pi) = S \setminus l$. ■

3.2.1. Refinamiento del mapa de retorno

Consideremos una sección transversal singular S y su correspondiente refinamiento $S(\delta)$. Entonces $S(\delta)$ también es una sección transversal singular de Λ . Notaremos por $\Pi_\delta = \delta_{S(\delta)}$ el mapa de retorno asociado a $S(\delta)$ y por $T_\delta(x)$ el tiempo de retorno de $x \in Dom(\Pi_\delta)$. Claramente $S(\delta) \subset S$ y luego $S(\delta) \subset U(\Lambda)$ para todo δ .

Observación 10 *El tiempo de retorno T_δ es uniformemente grande cuando $\delta \rightarrow 0^+$, es decir:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{x \in S(\delta)} T_\delta(x) = \infty \quad (3.3)$$

Lema 20 *Dada S una sección transversal singular de Λ con diámetro pequeño y cerca a Λ . Dada $S(\delta)$ el refinamiento de S . Entonces, para todo $\delta > 0$ tenemos:*

1. $Dom(\Pi)$ es \mathcal{F} - saturado.
2. Si $L \in \mathcal{F}$ y $L \subset Dom(\Pi_\delta)$, entonces existe $f(L) \in \mathcal{F}$ tal que $\Pi_\delta(L) \subset f(L)$. Además, la restricción $\Pi_\delta/L : L \rightarrow f(L)$ es continua.

Demostración. Dado un bloque aislante U de Λ . Dado $U(\Lambda)$ el dominio de la foliación estable \mathcal{F}^{ss} asumamos que $U \subset U(\Lambda)$. Dado S la sección transversal singular de Λ con diámetro pequeño y cerca a Λ . Podemos asumir que $S \subset U$. Consecuentemente $S(\delta) \subset U$ para todo δ y \mathcal{F} es la foliación de $S(\delta)$ para todo δ . Escojamos un $x \in Dom(\Pi_\delta)$. Entonces, existe $\sigma \in LSing_X(\Lambda)$ tal que

$$\Pi_\delta(x) \in S_\sigma^*(\delta)$$

para $* \in \{t, b\}$. Denotamos por $L \in \mathcal{F}$ la folia de \mathcal{F} que contiene a x . Podemos asumir que L esta contenido en \mathcal{F}^{ss} por proyección a lo largo del flujo. Dado que T_δ es uniformemente grande, tenemos que las órbitas que empiezan en L permanecen uniformemente cerca a x . Además, $\Pi_\delta(x)$ esta cerca a $\Lambda \cap S(\delta)$ que a su vez esta lejos de $\partial^h S(\delta)$. Entonces,

$$X_{T_\delta(x)}(L) \subset (\mathcal{F}_{\Pi_\delta(x), \epsilon}^{ss} \cap X_{[-\epsilon, \epsilon]}(S_\sigma^*(\delta))) \setminus X_{[-\epsilon, \epsilon]}(\partial^h S_\sigma^*(\delta)).$$

ver figura (3.5). Proyectando a lo largo del flujo obtenemos $L \subset Dom(\Pi_\delta)$ y

$$\Pi_\delta(L) \subset \mathcal{F}_{\Pi_\delta(x)}.$$

Esto prueba 1. Tomando $f(L) = \mathcal{F}\Pi_\delta(x)$ así obtenemos 2 por el teorema del flujo tubular. ■

Lema 21 *Supongamos que X_t no tiene órbitas periódicas en Λ . Dado U una vecindad de Λ y $\lambda > 0$ fijo. Entonces, existe una sección transversal singular $S \subset U$ de Λ tal que si $S(\delta)$ es el refinamiento de S , entonces para todo $\delta > 0$ pequeño, existe un campo de cono en $S(\delta)$ con la siguiente propiedades:*

- (1) C_α es transversal a $\mathcal{F}/_{S(\delta)}$.
- (2) Si $x \in Dom(\Pi_\delta)$ y Π_δ es diferenciable en x , entonces

$$D\Pi_\delta(x)(C_\alpha(x)) \subset Int(C_{\alpha/2}(\Pi_\delta(x)))$$

y

$$\| D\Pi_\delta(x) \cdot v_x \| \geq \lambda \cdot \| v_x \|,$$

para todo $v_x \in C_\alpha(x)$.

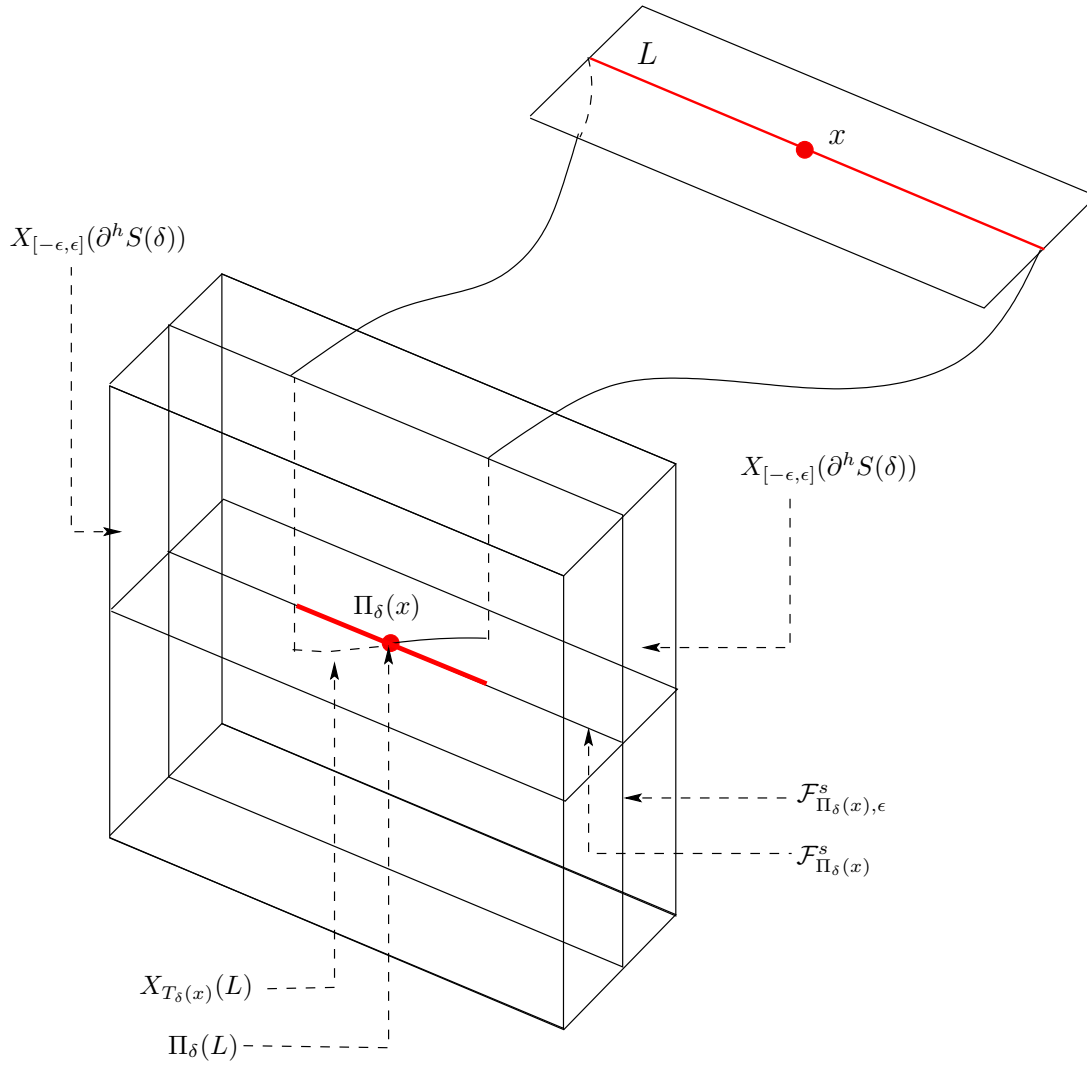


Figura 3.5: Prueba del lema 20.

Demostración. Claramente Λ es Lyapunov estable ya que este es un sumidero. Entonces, por el lema 7.5 de [MPa2], para todo $\alpha \in (0, 1]$ existe una vecindad $U_\alpha \subset U$ de Λ y constantes $T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha > 0$ tal que se verifican las siguientes propiedades.

- (1) La descomposición singular hiperbólica $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ de Λ extendida continuamente a una descomposición continua $T_{U_\alpha} M = E_{U_\alpha}^s \oplus E_{U_\alpha}^c$ sobre U_α con $E_{U_\alpha}^s$ siendo invariante.
- (2) Si $x \in U_\alpha$ y $t \geq T_\alpha$, entonces

$$DX_t(x)(C_\alpha(E_x^c)) \subset \text{Int}(C_{\alpha/2}(E_{X_t(x)}^c)),$$

donde

$$C_\alpha(E_x^c) = \{v_x \in T_x M : \angle(v_x, E_x^c) \leq \alpha\}.$$

(3) Si $x \in U_\alpha$, $X(x) \neq 0$, $X(x) \in C_\alpha(E_x^c)$, $t \geq T_\alpha$ y $v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap N_x$, entonces

$$\|P_x^t(v_x)\| \cdot \|X(X_t(x))\| \geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \|v_x\| \cdot \|X(x)\|,$$

donde N_x es el complemento ortogonal de $X(x)$ en $T_x M$; y P_x^t es el flujo lineal de Poincaré inducido por X_t (Ver [MPa2]).

Ahora, asumamos que X_t no tiene órbitas periódicas en Λ . Entonces, podemos escoger un $\sigma \in LSing_X(\Lambda)$. Aplicando el lema 7.6 de [MPa2] tenemos que existe una sección singular transversal S_σ^t, S_σ^b asociada a σ tal que las siguientes propiedades adicionales se tienen

$$(4) \quad S_\sigma^t \cup S_\sigma^b \subset U_\sigma.$$

$$(5) \quad \Lambda \cap (\partial^h S_\sigma^t \cup \partial^h S_\sigma^b).$$

$$(6) \quad X(x) \in C_\alpha(E_\alpha).$$

Ahora procedamos como en la prueba del lema 7.8 de [MPa2].

Escojamos $\alpha \in (0, 1]$ tal que

$$\inf\{\angle(v_x, E_x^s) : x \in U(\Lambda), v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T_x S\} > 0. \quad (3.4)$$

Para tal α tenemos $U_\alpha, T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha > 0$ satisfaciendo las propiedades anteriores. Para cada $\sigma \in LSing_X(\Lambda)$ podemos escoger secciones transversales singulares S_σ^t, S_σ^b asociadas a σ satisfaciendo las propiedades (4)-(6). En particular, la propiedad (5) y la definición 13 implica que la colección

$$S = \{S_\sigma^t, S_\sigma^b : \sigma \in LSing_X(\Lambda)\}$$

es una sección singular transversal de Λ . Veamos que S sirve. Primero, la propiedad (4) y el hecho que $U_\alpha \subset U$ implica

$$S \subset U$$

Observemos que el lema 21(1) se sigue por que $\alpha > 0$ en 3.4. Finalmente probemos 21(2). Fijemos un $D > 0$ tal que

$$\frac{\|X(x)\|}{\|X(y)\|} \geq D \text{ Para todo } x \in S.$$

Fijemos un $T_\lambda > 0$ grande tal que

$$K_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \cdot D \geq \lambda \text{ Para todo } t \geq T_\lambda. \quad (3.5)$$

Definamos el campo de cono C_α en S por

$$C_\alpha(x) = C_\alpha(E_x^c) \cap T_x S.$$

Por la ecuación 16 de [MPa2], tenemos que

$$D\Pi_\delta(x) = P_x^{t_\delta(x)}.$$

Entonces la propiedad (2) implica

$$D\Pi_\delta(x)(C_\alpha(x)) \subset \text{Int}(C_{\alpha/2}(\Pi(x)))$$

para todo $x \in \text{Dom}(\Pi_\delta)$ donde $D\Pi_\delta(x)$ existe, Además, las propiedades (3) y (6) implica que

$$\| D\Pi_\delta(x)(v_x) \| \geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha T_\delta(x)} \cdot D \| v_x \|$$

porque $T_\delta(x)$ es grande para $\delta > 0$ pequeño. luego

$$T_\delta(x) > T_\lambda \text{ Para todo } x \in S.$$

Entonces, 3.5 implica

$$\| D\Pi_\delta(x)(v_x) \| \geq \lambda \cdot \| v_x \| \text{ Para todo } x \in S.$$

Probando el lema 21(2). ■

3.2.2. Mapas de retorno hiperbólico triangulares con dominio principal

Dada $S(\delta)$ el refinamiento de S tenemos que cada componente de $S(\delta)$ la podemos identificar con el cuadrado $I^2 = I \times I$ (donde $[-1, 1]$) tal que la curva triangular corresponde a $\{0\} \times [-1, 1]$, y las fronteras corresponde $\{\pm\} \times [-1, 1]$. Por lo tanto:

$$\Sigma = \Sigma_\delta \text{ y } \partial^v S(\delta) = L_- \cup L_+ \text{ y } l = L_0.$$

Luego, definimos:

$$F = \Pi_\delta \text{ y } \text{Dom}(F) = \text{Dom}(\Pi_\delta) \quad (3.6)$$

Cabe observar que tanto F como $\text{Dom}(F)$ depende de δ .

Corolario 22 *Dado S una sección triangular asociada de Λ con diámetro pequeño y cerca a Λ , y $S(\delta)$ su refinamiento asociado. Dado \mathcal{F} la foliación inducida por la foliación estable de X_t en S . Si F es el mapa definido en 3.6, entonces la siguiente propiedades se tienen para todo $\delta > 0$ pequeño:*

- (1) F es una mapa triangular con foliación asociada $\mathcal{F}/_{S(\delta)}$.
- (2) Si X_t no tiene órbitas periódicas en Λ , entonces

$$Dom(F) = \Sigma /_{L_0}.$$

Demostración. La parte (1) se sigue de la definición 6, el lema 20 y (3.6). La parte (2), se sigue del lema 19. ■

Corolario 23 *Supongamos que X_t no tiene órbitas periódicas en Λ . Entonces, para cada $\lambda > 0$ existe una sección transversal singular S de Λ cerca a Λ tal que si $S(\delta)$ es el refinamiento de S , y F es el mapa definido en (3.6), entonces F es un mapa triangular λ -hiperbólico con $Dom(F) = \Sigma \setminus L_0$ para todo $\delta > 0$ pequeño.*

Demostración. Fijemos $\lambda > 1$. Dada $S \subset U$ una sección transversal singular dada en el lema 21 para λ y U . Tomando $\delta > 0$ pequeño, U cerca a Λ y reemplazando S por $S(\delta)$. Entonces, F es un mapa triangular con foliación asociada $\mathcal{F}/_{S(\delta)}$ por el corolario 22(1). Como X_t no tiene órbitas periódicas en Λ asumimos que $Dom(F) \setminus L_0$ por 22(2). Para finalizar miremos que F es λ -hiperbólico por (1) y (2) en la definición 7. ■

A continuación probaremos que si X_t no tiene órbitas periódicas en Λ , entonces el mapa de retorno F satisface **(H1)** y **(H2)**. En la demostración usaremos fuertemente el Teorema del Flujo Tubular.

Proposición 24 *Supongamos que X_t no tiene órbitas periódicas en Λ . Dado S una sección singular transversal de Λ con diámetro pequeño y cerca a Λ . Dado $S(\delta)$ el refinamiento de S . Entonces, el mapa F en (3.6) es un mapa triangular satisfaciendo **(H1)** y **(H2)** para todo $\delta > 0$ pequeño.*

Demostración. El corolario 22 implica que F es un mapa triangular con $\mathcal{F}/_{S(\delta)}$ su foliación asociada. Además $Dom(F) = \Sigma \setminus L_0$.

Veamos que se verifica **(H1)**. Dado $L \in \mathcal{F}$ tal que $L \subset Dom(F)$ y $n(L) = 0$. Se sigue de la definición de $n(L)$ que $F(L) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ y por lo tanto $F(L) \subset Int(\Sigma)$.

Entonces, por el Teorema del Flujo Tubular tenemos que F es C^1 en una vecindad conexas de L .

Veamos que se verifica **(H2)**. Dada $L_* \in \mathcal{F}$ tal que $L_* \subset \text{Dom}(F)$, $1 \leq n(L_*) < \infty$ y

$$F^{n(L_*)}(L_*) \subset \text{Dom}(F)$$

se sigue de la definición de $n(L_*)$ que

$$F^{n(L_*)-1}(L_*) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$$

luego, $F^i(L_*) \subset L_- \cup L_+$ para todo $0 \leq i \leq n(L_*) - 1$. Denotamos por L_i la folia de \mathcal{F} contenida en $F^i(L_*)$. Ahora, para todo $1 \leq i \leq n(L_*)$ escogemos bandas verticales V_i centrada en L_i . Aunque V_i no esta contenida en Σ tenemos que $V_i \setminus L_i$ consiste de dos componentes conexas V_i^1, V_i^2 tal que V_i^1 está contenida en $\Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ y V_i^2 es una pequeña extensión de Σ . Por el Teorema del Flujo Tubular podemos escoger estas bandas de tal manera que las trayectorias positivas que empiezan en V_i vayan directamente a V_{i+1} y las órbitas positivas en la otra banda vayan directamente a $\Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$. Luego, existen dos posibles casos a considerar.

$$L_* \Sigma \setminus (L_- \cup L_+) \text{ o } L_* \subset L_- \cup L_+.$$

Consideremos el caso $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$. Como $L_* \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ existen dos folias diferentes L, L' en la componente de Σ que contiene L_* , tal que $L < L_* < L'$. Definamos $S = [L, L']$, tal que S esta cerca a L_* tomando L y L' cerca a L_* . Claramente S es una vecindad saturada de L_* en Σ que es conexas. Además, $S \setminus L_*$ tiene dos componentes conexas, esto es, los conjuntos saturados, $S_1 = [L, L_*]$ y $S_2 = [L_*, L']$. Veamos que si S esta cerca a L_* , entonces S satisface **(H2)**. En efecto, si S esta cerca a L_* , entonces las órbitas positivas de X_t que empiezan en S van directamente a V_1 ya que $F(L_*) \subset L_1$. Las órbitas positivas en la componente de $S \setminus L_*$ van directamente a V_1 mientras que las órbitas de la otra componente S_2 van a V_1^2 .

Entonces, para la primera componente S_1 , tenemos que, $F(S_1) \subset V_1^1$ y luego

$$F(S_1) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+).$$

Para esta componente definimos

$$n^1(L_*) = 1$$

Por lo tanto

$$F^{n^1(L_*)}(S_1) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+).$$

Ahora, para la componente S_2 , tenemos dos opciones:

- (1) Que $F(S_2)$ no intercepte $\bigcup_{1 \leq i \leq n(L_*)} V_i^1$ antes que $F(S_2) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.
- (2) Que $F(S_2)$ intercepte en un primer elemento de $\bigcup_{1 \leq i \leq n(L_*)} V_i^1$ antes que $F(S_2) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.

Si tenemos la situación (1), entonces, definimos:

$$n^2(L_*) = n(L_*) + 1$$

Si tenemos la situación (2), entonces, definimos:

$$n^2(L_*) = i_0$$

Claramente $i_0 \neq 1$ ya que por el Teorema del Flujo Tubular asumimos que S_1 va directamente a V_1^1 consecuentemente:

$$n^2(L_*) \neq 1.$$

Luego:

$$F^{n^2(L_*)}(S_2) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+).$$

Dado que $F(N_{n(L_*)}) \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$ si $n^2(L_*) = n(L_*) + 1$ y $V_{i_0} \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$.

Por lo tanto, se sigue, (1) y (3) de **(H2)**. Por el Teorema del Flujo Tubular obtenemos (2) de **(H2)**. Análogamente se tiene para el caso en que $L_* \subset L_- \cup L_+$. ■

Teorema 25 *Un sumidero singular hiperbólico de un flujo C^1 sobre una 3-variedad cerrada tiene una órbita periódica.*

Demostración. Dado Λ un sumidero singular hiperbólico de un flujo X_t sobre una 3-variedad M . Asumamos por contradicción que Λ no tiene órbitas periódicas. Fijemos un $\lambda > 2$. Entonces, por el corolario 23, existe una sección transversal singular S cerca a Λ tal que si F es el mapa de retorno del refinamiento $S(\delta)$ de S , entonces existe $\delta > 0$ tal que F es un mapa triangular λ -hiperbólico con $Dom(F) = \Sigma \setminus L_0$. Además tenemos que F satisface las hipótesis **(H1)** y **(H2)**. Entonces, F tiene un punto periódico por el Teorema 18. Este punto periódico pertenece a una órbita periódica de X_t que a su vez pertenece a Λ , ya que este es un sumidero. Por lo tanto X_t tiene una órbita periódica en Λ , contradicción. ■

Índice de figuras

1.1.	DX_t Invariancia del fibrado tangente E^s .	2
1.2.	Descomposición $(K - \lambda)$ dominada, $\theta' < \theta$.	4
1.3.	Expande volumen	5
1.4.	Hiperbolicidad vía conos.	11
2.1.	Conjunto B y su correspondiente saturado.	13
2.2.	$F/L : L \rightarrow f(L)$ no es continua.	14
2.3.	Campo de conos C_α transversal a la foliación.	14
2.4.	Campo de conos.	15
2.5.	Hipótesis (H1) con $L \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, $S \setminus L = S_1 \cup S_2$.	16
2.6.	Hipótesis (H1) con $L \subset L_- \cup L_+$, $S \setminus L = S_2$.	17
2.7.	(H2) , con $L \subset \Sigma \setminus (L_- \cup L_+)$, $n^2(L_*) = 1$ y $1 < n^1(L_*) < n(L_*) + 1$.	17
2.8.	Hipótesis (H2) , con $L \subset L_- \cup L_+$, $n^2(L_*) = n(L_*) + 1$.	18
3.1.	Sección transversal asociada a una singularidad Lorenz-Like.	29
3.2.	$\mathcal{F}_{x,\epsilon}^s$	31
3.3.	Foliación asociada a la sección transversal singular de σ_k .	32

3.4. Refinamiento de la foliación asociada a la sección transversal singular de σ_k . 32

3.5. Prueba del lema 20. 36

Bibliografía

- [BM] S. Bautista, C. Morales, *Existence of peirodic orbits for singular hyperbolic sets*, Mathematical Journal Vol 6, 265-297, Moscow 2006.
- [HPS] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, y M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [B] S. Bautista, *Sobre conjuntos singulares hiperbolicos*. Ph.D thesis, Universidad Federal de Rio de Janeiro, 2005.
- [BDV] C. Bonnatti, L. J. Díaz, y M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, Encyclopedaedia of mathematical Sciences, vol. 102, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [MP] C. A. Morales, M. J. Pacifico, y E. R. Pujals. *Singular Hyperbolic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 11, 3393-3401.
- [MPa2] C. A. Morales and M. J. Pacifico, *A dichotomy for three - dimensional vector fields*, *Ergodic Theory Dynam.*, Systems 23 (2003), no. 5, 1575-1600.
- [S] M. Sambarino, *Hiperbolicidad y estabilidad*, XXII Escuela Venezolana de Matemáticas.
- [MPP] C. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals, *On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (326) 1998, no. 1, 81-86.
- [MPP04] C. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals, *C^1 robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers*, Ann. of Math. 160 (2004),1-54.
- [ST] Sotomayor J. *Lecciones de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Impa. Proyecto Euclides. 1979.