Bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$

Haydee Jiménez Tafur
Código:830256

Trabajo de tesis para optar al título de
MAGISTER SCIENTIAE EN MATEMÁTICAS

Director
Oswaldo Lezama

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
2010

Título en español

Bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$.

Title in English

Gröbner bases of modules over $\sigma - PBW$ extensions.

Resumen: En el trabajo se desarrolla la teoría de bases de Gröbner para submódulos del A-módulo libre A^m con $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, se implementa un algoritmo para el cálculo efectivo de las bases de Gröbner en el caso cuasi-conmutativo biyectivo y se presentan algunas aplicaciones de las bases de Gröbner en teoría de módulos, como el cálculo de sicigias, la presentación de un módulo, el núcleo y la imagen de un homomorfismo.

Abstract: In this work the theory of Gröbner bases is developed for submodules of the free A-module A^m with $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, an algorithm is implemented for the effective calculation of Gröbner bases in the quasi-conmutative biyective case, and some applications of Gröbner bases in theory of modules is presented, such as the calculation of the module of syzygies, the presentation of a module, the kernel and image of a homomorphism.

Palabras clave: Extensiones $\sigma - PBW$, módulos, reducción, bases de Gröbner, sicigias de módulos, álgebra homológica constructiva.

Keywords: $\sigma - PBW$ extensions, modules, reduction, Gröbner bases, syzygy of a module, constructive homological algebra.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado por

Jurado

Jurado

Director
Oswaldo Lezama

Bogotá, D.C., Mayo de 2010

Dedicado a

Mi esposo, mi compañero, mi amigo, mi confidente, ..., mi gran amor.

Agradecimientos

Al profesor Oswaldo Lezama, por haber confiado en mí y permitirme trabajar a su lado, contribuyendo así en mi formación profesional y personal.

A mi familia, en especial a mis padres y a mi esposo, por su apoyo incondicional y motivación continua.

Índice general

Introducción

El desarrollo de las bases de Gröbner en el caso conmutativo inició en 1965 cuando Buchberger (véase [4]) introdujo esta noción para ideales de polinomios con coeficientes en un cuerpo y estableció un algoritmo para su cálculo. La teoría de las bases de Gröbner en el caso conmutativo ha sido generalizada a submódulos del módulo libre $R[x_1, ..., x_n]^m$ con R un anillo conmutativo noetheriano que satisface ciertas condiciones de computabilidad (véase [14]). En el caso no conmutativo, Galligo en 1985 (véase [10]) extendió las bases de Gröbner para álgebras de Weyl sobre un cuerpo. También, Apel y Lassner (véase [2]) consideran bases de Gröbner para envolventes universales de álgebras de Lie de dimensión finita. Kandri-Rody y Weispfenning (véase [11]) en 1990 estudian bases de Gröbner para álgebras de tipo soluble (ciertos anillos de polinomios no conmutativos sobre cuerpos).

En 1994, Teo Mora (véase [19]) presenta una introducción de la teoría de bases de Gröbner para álgebras conmutativas y no conmutativas sobre cuerpos. En 1998 Chyzak y Salvy (véase [7]), mostraron condiciones suficientes para calcular bases de Gröbner en álgebras de Ore.

Algunas de las álgebras mencionadas anteriormente (el anillo usual de polinomios en n variables, las álgebras de Weyl, ciertas álgebras de Ore) son casos particulares de las extensiones PBW (*Extensiones de Poincaré-Birkhoff-Witt*), definidas en 1988 por Bell y Goodearl (véase [3]).

Torrecillas, Bueso y Lobillo (véase [5]) en 2001 caracterizaron los anillos PBW, desarrollaron la teoría para ideales y módulos de $R\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, pero con R un cuerpo y la aplicaron para realizar cálculos homológicos. En 2004 Zhang (véase [20]) extendió la teoría para los ideales izquierdos de extensiones PBW, $R\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, donde R es un anillo noetheriano no necesariamente conmutativo.

Lezama y Gallego en [16] (véase también [9]), estudiaron la teoría de bases de Gröbner para módulos sobre extensiones PBW $(R\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, con R es un anillo noetheriano no necesariamente conmutativo), ampliaron la noción de extensiones PBW de tal forma que incluyera ciertos anillos y álgebras no considerados anteriormente tales como los anillos de polinomios torcidos que no son tipo derivación (véase [17]), las álgebras de Heisenberg, etc. Estos anillos fueron denominados *extensiones PBW torcidas* o *extensiones* $\sigma - PBW$. Un caso particular de las extensiones $\sigma - PBW$ son las cuasi-conmutativas y las biyectivas.

En [16] se presenta la teoría de bases de Gröbner para ideales izquierdos de extensiones $\sigma - PBW$ y construye un algoritmo para calcularlas en el caso particular cuasi-conmutativo biyectivo.

En este trabajo, se pretende extender los resultados de [16] a submódulos del módulo libre A^m con $A := \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ y mostrar algunas aplicaciones en teoría de módulos.

El estudio de las bases de Gröbner no conmutativas también ha sido importante en el desarrollo de trabajos investigativos encaminados a dar soluciones a problemas de aplicación, como se presenta en Zhang en 2004 ([20]), quien en su tesis de doctorado consideró aplicaciones de las bases de Gröbner para extensiones PBW a la teoría de sistemas en movimiento; Chyzak, Quadrat y Robertz en 2005 ([8]), quienes aplican la teoría de bases de Gröbner para anillos no conmutativos a los sistemas de control lineal sobre álgebras de Ore; Quadrat y Cluzeau en 2008 ([6]), que aplicaron las bases de Gröbner para álgebras de Ore en sistemas funcionales lineales; entre otros; hecho que constituye otra motivación para presentar la teoría y formular algoritmos para bases de Gröbner no conmutativas para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$, en la medida en que estas extensiones generalizan en gran parte las estrucutras algebraicas sobre las que se ha desarrrollado una teoría de bases de Gröbner.

En el capítulo 1 se hará una revisión sobre algunas definiciones y resultados obtenidos en [9] y [16], referentes a la teoría de bases de gröbner para ideales izquierdos de extensiones $\sigma - PBW$, tales como la definición de extensiones PBW y extensiones $\sigma - PBW$, varios ejemplos de este tipo de anillos y algunas propiedades importantes que cumplen estas extensiones, como el teorema de la base de Hilbert.

En el capítulo 2 se presenta la teoría de las bases de Gröbner para submódulos del A-módulo libre izquierdo A^m de vectores columna de longitud $m \geq 1$, donde $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ es una extensión $\sigma - PBW$ de R, con R un anillo GSI (véase definición 2.2.1), iniciando con los elementos básicos como la definición de monomios en A^m y órdenes sobre estos monomios, el concepto de reducción y la construcción de un algoritmo de división; para luego dar caracterizaciones equivalentes de una base de Gröbner y finalmente calcular bases de Gröbner, usando un procedimiento similar al algoritmo de Buchberger, en el caso particular de las extensiones $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativas biyectivas.

En el tercer capítulo, se exhibe un método matricial para el cálculo de las sicigias de un submódulo $M = \langle \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s}\rangle$ del A-módulo libre izquierdo A^m, usando bases de Gröbner, donde A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasiconmutativa biyectiva, con R un anillo GSI. Además, se muestran otras aplicaciones básicas en teoría de módulos como el cálculo de presentaciones finitas, el núcleo y la imagen de un homomorfismo entre A-módulos.

CAPÍTULO 1

Extensiones $\sigma - PBW$

En [16] Lezama y Gallego presentan la teoría de bases de Gröbner para ideales izquierdos de extensiones $\sigma - PBW$ y construyen un algoritmo para calcularlas en el caso particular cuasi-conmutativo biyectivo. Como el presente trabajo generaliza esta situación, desarrollando la teoria para el caso de módulos, en este capítulo se hara una revisión sobre algunas definiciones y resultados obtenidos en [9] y [16] que serán tenidos en cuenta en capítulos posteriores.

1.1. Extensiones PBW

Las extensiones $\sigma - PBW$ surgen de una modificación de la definición de extensiones PBW (véase [9] y [16]), con el fín de incluir ciertos anillos y álgebras no considerados en tal noción, por tanto se hace necesario revisar su concepto y algunos ejemplos.

Las extensiones PBW (*Extensiones de Poincaré-Birkhoff-Witt*), definidas en 1988 por Bell y Goodearl (véase [3]), se definen como sigue:

Definición 1.1.1. *Sean R y A anillos con unidad. A es una extensión PBW de R, denotada $A := R\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, si las siguientes condiciones se cumplen:*

i. $R \subseteq A$.

ii. *Existen en A elementos $x_1, \dots, x_n$ tales que A es un R-módulo izquierdo libre con base $Mon(A) := \{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} | \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$.*

iii. $x_ir - rx_i \in R$, *para cada* $r \in R$ *y* $1 \leqslant i \leqslant n$.

iv. $x_ix_j - x_jx_i \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$, *para todo* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Algunas clases de anillos y álgebras importantes que son extensiones PBW, se presentan enseguida:

Ejemplo 1.1.1. a) Si $A = R[t_1, \ldots, t_n]$ es el anillo usual de polinomios, se tiene que $t_ir - rt_i = 0$ y $t_it_j - t_jt_i = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. $Mon(A)$ es una R-base para el R-módulo A.

b) El anillo de polinomios torcidos $A = R[x; \sigma, \delta]$ es el anillo de polinomios no conmutativo, con un producto definido por $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$, donde $\sigma : R \to R$ es un endomorfismo de R y δ es una σ-derivación de R, es decir, $\delta(r+r') = \delta(r)+\delta(r')$ y $\delta(rr') = \sigma(r)\delta(r')+\delta(r)r'$ para todo $r, r' \in R$. Cualquier anillo de polinomios torcidos de tipo derivación, es decir cuando $\sigma = i_R$, es una extensión PBW: Para este anillo $xr - rx = \delta(r)$, $xx - xx = 0$ y $\{x^l \mid l \geq 0\}$ es una R-base (véase [17], [18]).

c) Al considerar los anillos de polinomios torcidos iterados $R[x_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$, donde σ_i, δ_i están definidos sobre $R[x_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [x_{i-1}; \sigma_{i-1}, \delta_{i-1}]$, se tiene que un caso particular de éstos son las extensiones de Ore (véase [6]), es decir, cuando las siguientes condiciones se cumplen

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, 1 \leq i, j \leq n$$

$$\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i, 1 \leq i, j \leq n$$

$$\sigma_i\delta_j = \delta_j\sigma_i, i \neq j$$

$$\sigma_i(x_j) = x_j, j < i$$

$$\delta_i(x_j) = 0, j < i$$

de estas reglas se obtiene

$$x_ix_j = x_jx_i, 1 \leq i, j \leq n$$

$$\sigma_i(R), \delta_i(R) \subset R, 1 \leq i \leq n$$

Un ejemplo importante de extensiones de Ore son las álgebras de Ore, es decir, cuando $R := K[t_1, \ldots, t_m]$, $m \geq 0$ y K un campo.

Toda extensión de Ore de tipo derivación, es decir, cuando $\sigma_i = i_R$ para todo $1 \leq i \leq n$, es una extensión PBW: $x_i r - r x_i = \delta_i(r), x_i x_j - x_j x_i = 0$, la R-base es $Mon(A)$. En particular toda álgebra de Ore de tipo derivación es una extensión PBW.

d) El álgebra de Weyl $A_n(K) = K[t_1, \ldots, t_n][x_1; \sigma_1, \delta_1], \cdots, [x_n; \sigma_n, \delta_n]$ donde K es un campo, es un ejemplo importante de extensiones PBW; en realidad el álgebra de Weyl $A_n(K)$ es un álgebra de Ore de tipo derivación con $\sigma_i = i_{K[t_1,\ldots,t_n]}$ y $\delta_i = \partial/\partial t_i$ para $1 \leq i \leq n$. En este caso $x_i p = p x_i + \partial p/\partial t_i$, $x_i x_j - x_j x_i = 0$, para todo $p \in K[t_1, \ldots, t_n]$ y $1 \leq i, j \leq n$. $A_n(K)$ puede ser generalizada al álgebra de Weyl extendida $B_n(K) := K(t_1, \ldots, t_n)[x_1; \sigma_1, \delta_1], \cdots, [x_n; \sigma_n, \delta_n]$ con $\sigma_i = i_{K(t_1,\ldots,t_n)}$ y $\delta_i = \partial/\partial t_i$ para $1 \leq i \leq n$ ($K(t_1, \ldots, t_n)$ es el campo de fracciones de $K[t_1, \ldots, t_n]$). $B_n(K)$ es un álgebra de Ore de tipo derivación, por tanto es una extensión PBW (véase [17], [18]).

e) Sea K un anillo conmutativo y $\mathcal{G}$ un álgebra de Lie finito dimensional sobre K con base $\{x_1, \ldots, x_n\}$; el algebra envolvente de $\mathcal{G}$, $U(\mathcal{G})$ es una extensión PBW de K. En este caso $x_i k - k x_i = 0$, $x_i x_j - x_j x_i = [x_i, x_j] \in \mathcal{G} = K + K x_1 + \cdots + K x_n$, para todo $k \in K$ y $1 \leq i, j \leq n$ (véase [17], [18]).

f) Sea K, $\mathcal{G}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $U(\mathcal{G})$ como en el ejemplo anterior; sea R una K álgebra que contiene a K. El producto tensorial $A := R \otimes_K U(\mathcal{G})$ de las álgebras R y $U(\mathcal{G})$ es una extensión PBW de R. En este caso $\{1 \otimes x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ es una R-base de A; más aún, $(r \otimes 1)(1 \otimes x_i) - (1 \otimes x_i)(r \otimes 1) = 0$ y $(1 \otimes x_i)(1 \otimes x_j) - (1 \otimes x_j)(1 \otimes x_i) = 1 \otimes [x_i, x_j] \in 1 \otimes \mathcal{G} \subseteq R \otimes 1 + R \otimes x_1 + \cdots + R \otimes x_n$. El producto tensorial es un caso particular de una construcción más general, el producto cruzado $R * U(\mathcal{G})$ de R por $U(\mathcal{G})$, que también es una extensión PBW de R (véase [18]).

1.2. Extensiones $\sigma - PBW$ y caracterizaciones

En el ejemplo 1.1.1, numerales b) y c) si se escoge $\sigma_i \neq i_R$, entonces el anillo de polinomios torcidos $R[x; \sigma, \delta]$ y la extensión de Ore $R[x_1; \sigma_1, \delta_1] \ldots R[x_n; \sigma_n, \delta_n]$ no son extensiones PBW, pues por ejemplo en b) se tiene que $xr - rx = (\sigma(r) - r)x + \delta(r) \in Rx + R$. Este tipo de situaciones motivaron la introducción de la siguiente generalización de las extensiones PBW.

Definición 1.2.1. *Sean R y A anillos con unidad. A es una extensión $\sigma - PBW$ de R, denotada $A := \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, si las siguientes condiciones se cumplen:*

i. $R \subseteq A$.

ii. *Existen en A elementos $x_1, \ldots, x_n$ tales que A es un R-módulo izquierdo libre con base $Mon(A) := \{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} | \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$.*
En este caso se dice que A es un anillo polinomial izquierdo sobre R con respecto a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $Mon(A)$ es el conjunto de los monomios estándar de A. Más aún, $x_1^0 \cdots x_n^0 := 1 \in Mon(A)$.

iii. *Para todo $r \in R - \{0\}$ y $1 \leqslant i \leqslant n$, existe $c_{i,r} \in R - \{0\}$ tal que $x_i r - c_{i,r} x_i \in R$.*

iv. *Para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$ existe $c_{i,j} \in R - \{0\}$ tal que $x_j x_i - c_{i,j} x_i x_j \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$.*

Un caso particular de las extensiones $\sigma - PBW$ son las cuasi-conmutativas y las biyectivas, que se definen como se muestra a continuación:

Definición 1.2.2. *Sea A es una extensión $\sigma - PBW$.*

I. *A es cuasi-conmutativa si las condiciones iii. y iv. de la definición anterior son reemplazadas por*

iii'. *Para todo $r \in R - \{0\}$ y $1 \leqslant i \leqslant n$, existe $c_{i,r} \in R - \{0\}$ tal que $x_i r = c_{i,r} x_i$.*

iv'. *Para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$ existe $c_{i,j} \in R - \{0\}$ tal que $x_j x_i = c_{i,j} x_i x_j$.*

II. *A es biyectiva si σ_i es biyectiva para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ y $c_{i,j}$ es invertible para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Algunas observaciones que se desprenden de la definición 1.2.1 son:

1. Como el conjunto $Mon(A)$ es una $R-$base izquierda de $A := \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, los elementos $c_{i,r}$ y $c_{i,j}$ son únicos: en efecto, supongamos que para $r \in R$ e $i \in \{1, ..., n\}$ existen $c_{i,r}$, $t_{i,r}$, $c'_{i,r}$, $t'_{i,r} \in R$ tales que $x_i r = c_{i,r} x_i + t_{i,r} = c'_{i,r} x_i + t'_{i,r}$, entonces $(c_{i,r} - c'_{i,r})x_i + (t_{i,r} - t'_{i,r}) = 0$ y por la independencia lineal de $Mon(A)$ tenemos que $c_{i,r} = c'_{i,r}$ y $t_{i,r} = c'_{i,r}$. De manera análoga se muestra la unicidad de los $c_{i,j}$.

2. Si $r = 0$, entonces $c_{i,0} = 0$: en efecto, $0 = x_i 0 = c_{i,0} x_i + s_0$, para algún $s_0 \in R$, pero dado que $Mon(A)$ es un $R-$base, entonces $c_{i,0} = 0 = s_0$.

3. En *iii.* el elemento $c_{i,i} = 1$. En efecto, de la definición tenemos que $x_i^2 - c_{i,i}x_i^2 = r_0 + r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$ para ciertos $r_i \in R$; esto implica que $(1 - c_{i,i})x_i^2 = r_0 + r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$, pero dado que $Mon(A)$ es una $R-$base izquierda de $\sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, necesariamente tenemos que $1 - c_{i,i} = 0$, es decir, $c_{i,i} = 1$.

4. Sea $i < j$, por *iii.* en la definición 1.2.1, existen $c_{i,j}$, $c_{j,i} \in R$ tales que $x_ix_j - c_{j,i}x_{j,i} \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$ y $x_jx_i - c_{i,j}x_{i,j} \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$. De este modo $x_ix_j - c_{j,i}c_{i,j}x_ix_j \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$, y puesto que $Mon(A)$ es una $R-$base, se sigue que $1 - c_{j,i}c_{i,j} = 0$, es decir, $c_{i,j}$ tiene inverso a iquierda y $c_{j,i}$ inverso a derecha para cada $1 \leq i < j \leq n$.

El teorema que se presenta a continuación justifica la notación introducida para las extensiones $\sigma - PBW$.

Teorema 1.2.1. *Sea $A := \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ una extensión $\sigma - PBW$ de un anillo R. Entonces, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen σ_i un endomorfismo inyectivo sobre el anillo R y δ_i una σ_i-derivación de R, tales que para $r \in R$, $x_ir = \sigma_i(r)x_i + \delta_i(r)$.*

Demostración: Para todo $1 \leq i \leq n$ y cada $r \in R$ se tienen elementos $c_{i,r}$ y $r_i \in R$ tales que $x_ir = c_{i,r}x_i + r_i$; como $Mon(A)$ es una R-base de A, entonces $c_{i,r}$ y r_i son únicos para r, por tanto se definen

$$\begin{aligned} \sigma_i : R &\to R & \qquad \delta_i : R &\to R \\ r &\mapsto \sigma_i(r) := c_{i,r} & \qquad r &\mapsto \delta_i(r) := r_i \end{aligned}$$

La función σ_i es un endomorfismo de anillos y δ_i una σ_i-derivación de R, en efecto, sean r, $r' \in R$, entonces

$$x_ir = \sigma_i(r)x_i + \delta_i(r)$$

$$x_ir' = \sigma_i(r')x_i + \delta_i(r')$$

luego $x_i(r + r') = (\sigma_i(r) + \sigma_i(r'))x_i + (\delta_i(r) + \delta_i(r'))$.

Por otro lado, $x_i(r + r') = \sigma_i(r + r')x_i + \delta_i(r + r')$, pero como la representación de $x_i(r + r')$ en términos de la base $Mon(A)$, es única, entonces

$$\sigma_i(r + r') = \sigma_i(r) + \sigma_i(r')$$

$$\delta_i(r + r') = \delta_i(r) + \delta_i(r')$$

esto es, σ_i y δ_i son aditivas.

Ahora bien, $x_i(rr') = \sigma_i(rr')x_i + \delta_i(rr')$, pero también se tiene que

$$\begin{aligned} x_i(rr') = (x_i r)r' &= \sigma_i(r)x_i r' + \delta_i(r)r' \\ &= \sigma_i(r)(\sigma_i(r')x_i + \delta_i(r')) + \delta_i(r)r' \\ &= \sigma_i(r)\sigma_i(r')x_i + \sigma_i(r)\delta_i(r') + \delta_i(r)r' \end{aligned}$$

por tanto

$$\sigma_i(rr') = \sigma_i(r)\sigma_i(r')$$

$$\delta_i(rr') = \sigma_i(r)\delta_i(r') + \delta_i(r)r'$$

y además $\sigma_i(1) = 1$. La inyectividad de los endomorfismos σ_i está garatizada por la parte *iii.* de la definición 1.2.1, pues $c_{i,r} \neq 0$ para $r \neq 0$. □

Algunos anillos que son ejemplos de extensiones $\sigma - PBW$ son los siguientes:

Ejemplo 1.2.1. a) Cualquier extensión PBW es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, puesto que en este caso $c_{i,r} = r$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $c_{i,j} = 1$ para cada $1 \leq i, j \leq n$.

b) Cualquier anillo de polinomios torcidos $R[x; \sigma, \delta]$ de tipo inyectivo, es decir con σ inyectiva, es una extensión $\sigma - PBW$. En este caso se tiene que $R[x; \sigma, \delta] = \sigma(R)\langle x\rangle$. Si adicionalmente $\delta = 0$ entonces $R[x; \sigma]$ es cuasi-conmutativa.

c) Cualquier anillo de polinomios torcidos iterados $R[x_1; \sigma_1, \delta_1], \cdots, [x_n; \sigma_n, \delta_n]$ de tipo inyectivo, es decir, si satisface las siguientes condiciones:

$$\text{Para } 1 \leq i \leq n, \sigma_i \text{ es inyectiva.}$$

$$\text{Para cada } r \in R \text{ y } 1 \leq i \leq n, \sigma_i(r), \delta_i(r) \in R.$$

$$\text{Para } i < j, \sigma_j(x_i) = cx_i + d \text{ con } c, d \in R \text{ y } c \text{ tiene inverso a izquierda.}$$

$$\text{Para } i < j, \delta_j(x_i) \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n.$$

es una extensión $\sigma - PBW$. Bajo estas condiciones se tiene que

$$R[x_1; \sigma_1, \delta_1], \cdots, [x_n; \sigma_n, \delta_n] = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

En particular, cualquier álgebra de Ore $K[t_1,\ldots,t_n][x_1;\sigma_1,\delta_1],\cdots,[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ de tipo inyectivo, es decir,

$$\text{Para } 1\leq i\leq n, \sigma_i \text{ es inyectiva.}$$

es una extensión $\sigma - PBW$. En efecto, en álgebras de Ore se tiene que para cada $r\in K[t_1,\ldots,t_n]$ y $1\leq i\leq n$, $\sigma_i(r),\delta_i(r)\in K[t_1,\ldots,t_n]$ y $\sigma_j(x_i)=x_i$ y $\delta_j(x_i)=0$ para $i<j$. Bajo estas condiciones se obtiene:

$$K[t_1,\ldots,t_n][x_1;\sigma_1,\delta_1],\cdots,[x_n;\sigma_n,\delta_n]=\sigma(K[t_1,\ldots,t_n])\langle x_1,\ldots,x_n\rangle.$$

Algunos ejemplos concretos de álgebras de Ore de tipo inyectivo son las siguientes:

- El *álgebra de operadores shift*: se define por $S_h:=K[t][x_h;\sigma_h,\delta_h]$ donde K es un campo, $h\in K$, $\sigma_h(p(t)):=p(t-h)$ y $\delta_h:=0$. S_h es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva.
- El *álgebra mezclada*: se define por $D_h:=K[t][x;i_{K[t]},\frac{d}{dt}][x_h;\sigma_h,\delta_h]$ donde K es un campo, $h\in K$ y $\sigma_h(x):=x$. D_h es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva.
- El *álgebra para sistemas lineales discretos multidimensionales*: es definida por

$$D:=K[t_1,\ldots,t_n][x_1;\sigma_1,0]\cdots[x_n;\sigma_n,0]$$

donde K es un campo,

$$\sigma_i(p(t_1,\ldots,t_n)):=p(t_1,\ldots,t_{i-1},t_i+1,t_{i+1},\ldots,t_n)$$

y $\sigma_i(x_i):=x_i, 1\leq i\leq n$. D es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva.

d) Análogo aditivo del álgebra de Weyl: Sea K un campo, la K-álgebra $A_n(q_1,\ldots,q_n)$ es generada por $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ y cumple las relaciones

$$x_ix_j=x_jx_i, y_iy_j=y_jy_i, \text{ con } 1\leq i,j\leq n,$$

$$y_ix_j=x_jy_i \text{ con } i\neq j,$$

$$y_ix_i=q_ix_iy_i+1 \text{ con } 1\leq i\leq n,$$

donde $q_i \in K - \{0\}$. Se observa que $A_n(q_1, \ldots, q_n)$ es isomorfo al anillo de polinomios torcidos iterados $K[x_1, \ldots, x_n][y_1; \sigma_1, \delta_1], \cdots, [y_n; \sigma_n, \delta_n]$ sobre el anillo conmutativo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\sigma_j(y_i) := y_i, \delta_j(y_i) := 0 \text{ con } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$\sigma_i(x_j) := x_j, \delta_i(x_j) := 0 \text{ con } i \neq j,$$

$$\sigma_i(x_i) := q_i x_i, \delta_i(x_i) := 1 \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

Entonces $A_n(q_1, \ldots, q_n)$ satisface las condiciones de iii) y es biyectiva; y se tiene que

$$A_n(q_1, \ldots, q_n) = \sigma(K[x_1, \ldots, x_n])\langle y_1, \ldots, y_n \rangle.$$

e) Análogo multiplicativo del álgebra de Weyl: Sea K un campo, la K-álgebra $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ es generada por $x_1, \ldots, x_n$ y cumple las relaciones

$$x_j x_i = \lambda_{ji} x_i x_j, \text{ con } 1 \leq i < j \leq n,$$

donde $\lambda_{ji} \in K - \{0\}$. Se observa que $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ es isomorfo al anillo de polinomios torcidos iterados $K[x_1][x_2; \sigma_2] \cdots [x_n; \sigma_n]$, donde

$$\sigma_j(x_i) := \lambda_{ji} x_i, \text{ con } 1 \leq i < j \leq n.$$

Entonces $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ satisface las condiciones de iii) y por lo tanto

$$\mathcal{O}_n(\lambda_{ji}) = \sigma(K[x_1])\langle x_2, \ldots, x_n \rangle.$$

$\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ es cuasi-conmutativa y biyectiva.

f) Álgebra q-Heissenberg: Sea K un campo, la K-álgebra $h_n(q)$ es generada por $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ y cumple las relaciones

$$x_i x_j = x_j x_i, y_i y_j = y_j y_i, z_i z_j = z_j z_i, \text{ con } 1 \leq i, j \leq n,$$

$$y_i x_j = x_j y_i, z_i x_j = x_j z_i, z_i y_j = y_j z_i \text{ con } i \neq j,$$

$$z_iy_i = qy_iz_i, z_ix_i = q^{-1}x_iz_i + y_i, y_ix_i = qx_iy_i \text{ con } 1 \leq i \leq n,$$

donde $q \in K - \{0\}$. Se observa que $h_n(q)$ es isomorfo al anillo de polinomios torcidos iterados $K[x_1, \ldots, x_n][y_1; \sigma_1], \cdots, [y_n; \sigma_n][z_1; \theta_1, \delta_1] \cdots [z_n; \theta_n, \delta_n]$ sobre el anillo conmutativo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\theta_j(z_i) := z_i, \delta_j(z_i) := 0, \sigma_j(y_i) := y_i, \text{ con } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$\theta_j(y_i) := y_i, \delta_j(y_i) := 0, \theta_j(x_i) := x_i, \delta_j(x_i) := 0, \sigma_j(x_i) := x_i, \text{ con } i \neq j,$$

$$\theta_i(y_i) := qy_i, \delta_i(y_i) := 0, \theta_i(x_i) := q^{-1}x_i, \delta_i(x_i) := y_i, \sigma_i(x_i) := qx_i, \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

Como $\delta_i(x_i) = y_i \notin K[x_1, \ldots, x_n]$ entonces $h_n(q)$ no es una extensión $\sigma - PBW$ de $K[x_1, \ldots, x_n]$, sin embargo $h_n(q)$ es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva de K:

$$h_n(q) = \sigma(K)\langle x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n\rangle.$$

Los ejemplos de extensiones $\sigma - PBW$ presentados anteriormente se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Extensiones PBW: $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ (todas son biyectivas)

   a) Extensiones de Ore de tipo derivación: $R[x_1; i_R, \delta_1] \cdots [x_n; i_R, \delta_n]$

      i) Anillo de polinomios: $R[x_1, \ldots, x_n]$

      ii) Álgebras de Ore de tipo derivación: $K[t_1, \ldots, t_n][x_1; i, \delta_1] \cdots [x_n; i, \delta_n]$

         Álgebras de Weyl:

         $A_n(K) = K[t_1, \ldots, t_n][x_1, i, \partial_1\ \partial t_1] \cdots [x_n, i, \partial_n\ \partial t_n]$

         $B_n(K) = K(t_1, \ldots, t_n)[x_1; i, \delta_1] \cdots [x_n; i, \delta_n]$

   b) Producto Cruzado: $R * U(G)$

      Producto tensorial: $R \otimes_K U(G)$

         Álgebra envolvente de un álgebra de Lie: $U(G)$

2. Anillo de polinomios torcidos iterados de tipo inyectivo

   a) Álgebras de Ore de tipo inyectivo

      El álgebra de operadores shift: S_h (cuasi-conmutativa y biyectiva)

      El álgebra mezclada: D_h (cuasi-conmutativa y biyectiva)

El álgebra para sistemas lineales discretos multidimensionales: D (cuasi-conmutativa y biyectiva)

b) Análogo aditivo del álgebra de Weyl: $A_n(q_1, \ldots, q_n)$ (biyectiva)

c) Análogo multiplicativo del álgebra de Weyl: $O_n(\lambda_{ji})$ (cuasi-conmutativa y biyectiva)

d) Álgebra q-Heisenberg: $h_n(q)$ (biyectiva)

Definición 1.2.3. *Sea A una extensión $\sigma - PBW$ de un anillo R con endomorfismos σ_i, $1 \leq i \leq n$, como en el teorema 1.2.1.*

i. Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, $\sigma^\alpha := \sigma_1^{\alpha_1} \cdots \sigma_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si además $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N^n$, entonces $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

ii. Para $X = x^\alpha \in Mon(A)$, $deg(X) := |\alpha|$ y $exp(X) := \alpha$.

iii. Sea $0 \neq f \in A$, con $f = c_1X_1 + \cdots + c_tX_t$ con $X_i \in Mon(A)$ y $c_i \in R$, entonces $deg(f) := \max\{deg(X_i)\}_{i=1}^t$.

Las extensiones $\sigma - PBW$ pueden ser caracterizadas de la siguiente forma:

Teorema 1.2.2. *Sea A un anillo polinomial izquierdo sobre R con respecto a $\{x_1, ..., x_n\}$. A es una extensión $\sigma - PBW$ si y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

a. Para todo $x^\alpha \in Mon(A)$ y todo $r \in R - \{0\}$ existen únicos elementos $r_\alpha := \sigma^\alpha(r) \in R - \{0\}$ y $p_{\alpha,r} \in A$ tales que

$$x^\alpha r = r_\alpha + p_{\alpha,r},$$

donde $p_{\alpha,r} = 0$ o $deg(p_{\alpha,r}) < |\alpha|$ si $p_{\alpha,r} \neq 0$. Además, si r es invertible a izquierda, entonces r_α es también invertible a izquierda.

b. Para todo $x^\alpha, x^\beta \in Mon(A)$ existen únicos elementos $c_{\alpha,\beta} \in R - \{0\}$ y $p_{\alpha,\beta} \in A$ tales que

$$x^\alpha x^\beta = c_{\alpha,\beta} x^{\alpha+\beta} + p_{\alpha,\beta},$$

donde $c_{\alpha,\beta}$ es invertible a izquierda, $p_{\alpha,\beta} = 0$ o $deg(p_{\alpha,\beta}) < |\alpha + \beta|$ si $p_{\alpha,\beta} \neq 0$.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [9]. Un esquema de la demostración es: Si se supone que A es una extensión $\sigma - PBW$ la parte a. se prueba por inducción sobre el número de variables involucradas en x^α, en donde para una variable, esto es $x_i^k r = r_k x_i^k + p_{k,r}$ donde $r_k := \sigma_i^k(r) \in R - \{0\}$, $p_{k,r} \in A$ y $p_{k,r} = 0$ o $deg(p_{k,r}) < k$, también se prueba por inducción sobre k.

La demostración de la parte b. se realiza por inducción sobre el número de variables involucradas en x^α o x^β, en donde si x^α y x^β incluyen sólo una variable, esto es para $i < j$ y $k, m \geq 0$, $x_j^k x_i^m = c_{k,m} x_i^m x_j^k + p_{k,m}$ con $c_{k,m} \in R$ invertible a izquierda, $p_{k,m} \in A$ y $p_{k,m} = 0$ o $deg(p_{k,m}) < k + m$, se prueba por inducción doble, sobre k y sobre m. La unicidad de los elementos $r_\alpha, p_{\alpha,r}, c_{\alpha,\beta}$ y $p_{\alpha,\beta}$ lo garantiza el hecho de que $Mon(A)$ es una R-base para A. La otra implicación se cumple debido a que las condiciones iii. y iv. de la definición 1.2.1 son casos particulares de a. y b. respectivamente.

Algunas observaciones relacionadas con el teorema anterior son:

1. Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, se denota con $c'_{\alpha,\beta}$ un inverso izquierdo de $c_{\alpha,\beta}$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ entonces $c_{\alpha,\beta} = 1$ y por tanto $c'_{\alpha,\beta} = 1$.

2. De la demostración del teorema 1.2.2 se obtiene que si A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, entonces $p_{\alpha,r} = 0$ y $p_{\alpha,\beta} = 0$ para todo $0 \neq r \in R$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

3. Si A es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, entonces de la demostración del teorema 1.2.2 también se concluye que $c_{\alpha,\beta}$ es invertible para todo α, $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Ciertos resultados que se desprenden de la asociatividad de los monomios y de la asociatividad de los monomios con los coeficientes, serán útiles en desarrollos posteriores, por tal razón se presentan a continuación:

Sean $\theta, \gamma, \beta \in \mathbb{N}^n$ y $c \in R$, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta}) c_{\theta,\gamma+\beta} = c_{\theta,\gamma} c_{\theta+\gamma,\beta} \tag{1.1}$$

$$\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c)) c_{\theta,\gamma} = c_{\theta,\gamma} \sigma^{\theta+\gamma}(c) \tag{1.2}$$

La igualdad 1.1 se obtiene del hecho de que $x^\theta(x^\gamma x^\beta) = (x^\theta x^\gamma) x^\beta$, entonces

$$x^\theta(c_{\gamma,\beta} x^{\gamma+\beta} + p_{\gamma,\beta}) = (c_{\theta,\gamma} x^{\theta+\gamma} + p_{\theta,\gamma}) x^\beta$$

$$x^\theta c_{\gamma,\beta} x^{\gamma+\beta} + x^\theta p_{\gamma,\beta} = c_{\theta,\gamma} x^{\theta+\gamma} x^\beta + p_{\theta,\gamma} x^\beta$$

$$(\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})x^\theta + p_{\theta,c_{\gamma,\beta}})x^{\gamma+\beta} + x^\theta p_{\gamma,\beta} = c_{\theta,\gamma}(c_{\theta+\gamma,\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + p_{\theta+\gamma,\beta}) + p_{\theta,\gamma}x^\beta$$

$$\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})x^\theta x^{\gamma+\beta} + p_{\theta,c_{\gamma,\beta}}x^{\gamma+\beta} + x^\theta p_{\gamma,\beta} = c_{\theta,\gamma}c_{\theta+\gamma,\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + c_{\theta,\gamma}p_{\theta+\gamma,\beta}) + p_{\theta,\gamma}x^\beta$$

$$\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})(c_{\theta,\gamma+\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + p_{\theta,\gamma+\beta}) + p_{\theta,c_{\gamma,\beta}}x^{\gamma+\beta} + x^\theta p_{\gamma,\beta} = c_{\theta,\gamma}c_{\theta+\gamma,\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + q$$

$$\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})c_{\theta,\gamma+\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + \sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})p_{\theta,\gamma+\beta} + p_{\theta,c_{\gamma,\beta}}x^{\gamma+\beta} + x^\theta p_{\gamma,\beta} = c_{\theta,\gamma}c_{\theta+\gamma,\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + q$$

$$\sigma^\theta(c_{\gamma,\beta})c_{\theta,\gamma+\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + p = c_{\theta,\gamma}c_{\theta+\gamma,\beta}x^{\theta+\gamma+\beta} + q$$

donde p, $q \in A$ con $deg(p) < |\theta+\gamma+\beta|$ y $deg(q) < |\theta+\gamma+\beta|$.

La igualdad 1.2 se obtiene teniendo en cuenta que $x^\theta(x^\gamma c) = (x^\theta x^\gamma)c$, entonces

$$x^\theta(\sigma^\gamma(c)x^\gamma + p_{\gamma,c}) = (c_{\theta,\gamma}x^{\theta+\gamma} + p_{\theta,\gamma})c$$

$$x^\theta\sigma^\gamma(c)x^\gamma + x^\theta p_{\gamma,c} = c_{\theta,\gamma}x^{\theta+\gamma}c + p_{\theta,\gamma}c$$

$$(\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))x^\theta + p_{\theta,\sigma^\gamma(c)})x^\gamma + x^\theta p_{\gamma,c} = c_{\theta,\gamma}(\sigma^{\theta+\gamma}(c)x^{\theta+\gamma} + p_{\theta+\gamma,c}) + p_{\theta,\gamma}c$$

$$\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))x^\theta x^\gamma + p_{\theta,\sigma^\gamma(c)}x^\gamma + x^\theta p_{\gamma,c} = c_{\theta,\gamma}\sigma^{\theta+\gamma}(c)x^{\theta+\gamma} + c_{\theta,\gamma}p_{\theta+\gamma,c} + p_{\theta,\gamma}c$$

$$\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))(c_{\theta,\gamma}x^{\theta+\gamma} + p_{\theta,\gamma}) + p_{\theta,\sigma^\gamma(c)}x^\gamma + x^\theta p_{\gamma,c} = c_{\theta,\gamma}\sigma^{\theta+\gamma}(c)x^{\theta+\gamma} + c_{\theta,\gamma}p_{\theta+\gamma,c} + p_{\theta,\gamma}c$$

$$\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))c_{\theta,\gamma}x^{\theta+\gamma} + \sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))p_{\theta,\gamma} + p_{\theta,\sigma^\gamma(c)}x^\gamma + x^\theta p_{\gamma,c} = c_{\theta,\gamma}\sigma^{\theta+\gamma}(c)x^{\theta+\gamma} + c_{\theta,\gamma}p_{\theta+\gamma,c} + p_{\theta,\gamma}c$$

$$\sigma^\theta(\sigma^\gamma(c))c_{\theta,\gamma}x^{\theta+\gamma} + p = c_{\theta,\gamma}\sigma^{\theta+\gamma}(c)x^{\theta+\gamma} + q$$

donde p, $q \in A$ con $deg(p) <\mid \theta+\gamma \mid$ y $deg(q) <\mid \theta+\gamma \mid$.

Una consecuencia inmediata del teorema 1.2.2 es la siguiente

Corolario 1.2.1. *Si R no tiene divisores de cero, entonces $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ no tiene divisores de cero.*

Demostración: Sean $f = cx^{\alpha} + p$, $g = dx^{\beta} + q$ elementos en A, con $c, d \in R - \{0\}$, $p, q \in A$, $p = 0$ o $deg(p) < |\alpha|$ y $q = 0$ o $deg(q) < |\beta|$, entonces

$$\begin{aligned}
fg &= (cx^{\alpha} + p)(dx^{\beta} + q) \\
&= cx^{\alpha}dx^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq \\
&= c(d_{\alpha}x^{\alpha} + p_{\alpha,d})x^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq \\
&= cd_{\alpha}x^{\alpha}x^{\beta} + cp_{\alpha,d}x^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq \\
&= cd_{\alpha}(c_{\alpha,\beta}x^{\alpha+\beta} + p_{\alpha,\beta}) + cp_{\alpha,d}x^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq \\
&= cd_{\alpha}c_{\alpha,\beta}x^{\alpha+\beta} + cd_{\alpha}p_{\alpha,\beta} + cp_{\alpha,d}x^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq
\end{aligned}$$

con $d_{\alpha} \in R - \{0\}$, $p_{\alpha,d} \in A$, $p_{\alpha,d} = 0$ o $deg(p_{\alpha,d}) < |\alpha|$ y $c_{\alpha,\beta} \in R - \{0\}$, $p_{\alpha,\beta} \in A$, $p_{\alpha,\beta} = 0$ o $deg(p_{\alpha,\beta}) < |\alpha + \beta|$. Como se tiene que $cd_{\alpha}c_{\alpha,\beta} \neq 0$ y $q' := cd_{\alpha}p_{\alpha,\beta} + cp_{\alpha,d}x^{\beta} + cx^{\alpha}q + pdx^{\beta} + pq \in A$ es tal que $h = 0$ o $deg(h) < |\alpha + \beta|$, entonces $fg \neq 0$. $\square$

La siguiente propiedad será de gran importancia más adelante, pues permite asegurar que el algoritmo para calcular bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$ termina.

Teorema 1.2.3. *Si R es un anillo Noetheriano a izquierda entonces $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ es también un anillo Noetheriano a izquierda.*

Una propiedad importante de una extensión A $\sigma - PBW$ es que su correspondiente anillo graduado $G(A)$ es isomorfo al anillo $R[x_1, \ldots, x_n]/I$, donde I es el ideal izquierdo generado por el conjunto $\{x_i r - \sigma_i(r)x_i, x_j x_i - c_{i,j}x_i x_j \mid r \in R, 1 \leq i < j \leq n\}$; este resultado, junto con el hecho de que dado un anillo filtrado S, si su correspondiente anillo graduado $G(S)$ es noetheriano a izquierda, entonces S es noetheriano a izquierda; conforman la idea central de la demostración de la propiedad notheriana mencionada anteriormente, y que puede ser consultada en [9]; pues si R es noetheriano, por el teorema de la base de Hilbert, $R[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, y por tanto, $R[x_1, \ldots, x_n]/I$ también lo es; entonces $G(A)$ es notheriano a izquierda y en consecuencia A también lo es.

1.3. Órdenes monomiales sobre $Mon(A)$

Sea $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ una extensión $\sigma - PBW$ de R y sea $\succeq$ un orden total definido sobre $Mon(A)$. Si $x^\alpha \succeq x^\beta$ pero $x^\alpha \neq x^\beta$, se escribirá $x^\alpha \succ x^\beta$. Sea $f \neq 0$ un elemento de A, si

$$f = c_1 X_1 + \cdots + c_t X_t,$$

con $c_i \in R - \{0\}$ y $X_1, \ldots, X_t \in Mon(A)$ tales que $X_1 \succ \cdots \succ X_t$, entonces $lm(f) := X_1$ es el monomio principal de f, $lc(f) := c_1$ es el coeficiente principal de f, $lt(f) := c_1 X_1$ es el término principal de f y $exp(f) := exp(X_1)$ es el exponente de f. Si $f = 0$, se define $lm(0) := 0$, $lc(0) := 0$ y $lt(0) := 0$, estableciendo además que $X \succ 0$ para todo $X \in Mon(A)$. De este modo, se extiende el orden total $\succeq$ a $Mon(A) \cup \{0\}$.

La definición de órdenes monomiales sobre $Mon(A)$ se hace necesaria para la implementación del algoritmo de división sobre A^m.

Definición 1.3.1. *Sea $\succeq$ un orden total sobre $Mon(A)$; se dice que $\succeq$ es un orden monomial sobre $Mon(A)$ si satisface las siguientes condiciones:*

i. Para todo $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, x^\delta \in Mon(A)$

$$Si\ x^\beta \succeq x^\alpha \ entonces\ lm(x^\gamma x^\beta x^\delta) \succeq lm(x^\gamma x^\alpha x^\delta).$$

ii. $x^\alpha \succeq 1$ para todo $x^\alpha \in Mon(A)$.

iii. $\succeq$ es compatible con el grado, es decir, si $|\beta| \geq |\alpha|$ entonces $x^\beta \succeq x^\alpha$.

Los órdenes monomiales son también denominados *órdenes admisibles*. La condición iii. de la definición anterior, se necesita en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Todo orden monomial sobre $Mon(A)$ es un buen orden. En consecuencia, no existen cadenas decrecientes infinitas en $Mon(A)$.*

Ejemplo 1.3.1. Un ejemplo típico de estos órdenes monomiales es el orden lexicográfico graduado, denotado *deglex* y que se define como sigue: dados $x^{\alpha}, x^{\beta} \in Mon(A)$,

$$x^{\alpha} \preceq x^{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| \leq |\beta| \\ \text{o} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ y la primeran entrada no nula desde la} \\ \text{izquierda de } \beta - \alpha \text{ es positiva.} \end{cases}$$

En lo que sigue se asumirá que $Mon(A)$ está dotado de algún orden monomial.

Definición 1.3.2. *Sean $x^{\alpha}, x^{\beta} \in Mon(A)$, se dice que x^{α} divide a x^{β}, denotado por $x^{\alpha} \mid x^{\beta}$, si existen $x^{\gamma}, x^{\delta} \in Mon(A)$ tales que $x^{\beta} = lm(x^{\gamma}x^{\alpha}x^{\delta})$. También se dice que todo monomio $x^{\alpha} \in Mon(A)$ divide al polinomio cero.*

Teorema 1.3.2. *Sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, $x^{\alpha}, x^{\beta} \in Mon(A)$ y $f, g \in A - \{0\}$, entonces*

a. $lm(x^{\alpha}g) = lm(x^{\alpha}lm(g)) = x^{\alpha + exp(lm(g))}$, *es decir,* $exp(lm(x^{\alpha}g)) = \alpha + exp(lm(g))$. *En particular,*

$$lm(lm(f)lm(g)) = x^{exp(lm(f)) + exp(lm(g))}, \text{ es decir,}$$

$$exp(lm(lm(f)lm(g))) = exp(lm(f)) + exp(lm(g))$$

y

$$lm(x^{\alpha}x^{\beta}) = x^{\alpha+\beta}, \text{ es decir, } exp(lm(x^{\alpha}x^{\beta})) = \alpha + \beta.$$

b. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i. $x^{\alpha} \mid x^{\beta}$.

ii. Existe un único $x^{\theta} \in Mon(A)$ *tal que* $x^{\beta} = lm(x^{\theta}x^{\alpha}) = x^{\theta+\alpha}$ *y por tanto* $\beta = \theta + \alpha$.

iii. Existe un único $x^{\theta} \in Mon(A)$ *tal que* $x^{\beta} = lm(x^{\alpha}x^{\theta}) = x^{\alpha+\theta}$ *y por tanto* $\beta = \alpha + \theta$.

iv. $\beta_i \geq \alpha_i$ *para* $1 \leq i \leq n$.

Definición 1.3.3. *El mínimo común múltiplo de elementos en $Mon(A)$ existe: en efecto, sean $x^{\alpha}, x^{\beta} \in Mon(A)$, entonces $mcm(x^{\alpha}, x^{\beta}) = x^{\gamma} \in Mon(A)$, donde $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ con $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para cada $1 \leq i \leq n$.*

Observación. El estudio de las bases de Gröbner no conmutativas también fue abordado por Viktor Levandovskyy [12] en el caso de las G-álgebras. Sin embargo, este tipo de álgebras no son generalizadas por las extensiones $\sigma - PBW$, ni las G-álgebras generalizan las extensiones $\sigma - PBW$. Una *G-álgebra* es una $\mathbb{K}$-álgebra A con $\mathbb{K} \subset Z(A)$ (centro de A), generada por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, sujeta a las relaciones $x_jx_i - c_{ij}x_ix_j - d_{ij}$, con $1 \leq i < j \leq n$, donde $c_{ij} \in \mathbb{K}^*$ y los d_{ij} son polinomios cuyos monomios están en la base PBW de A; además se debe tener que:

Condición de ordenación: Existe un buen orden monomial $<_A$ sobre A tal que para todo $i < j$, $lm(d_{ij}) <_A x_ix_j$.

Condición de no degeneración: Los conjuntos $C = \{c_{ij}\}$ y $D = \{d_{ij}\}$ satisfacen las siguientes identidades en A: $\mathcal{NDC}_{ijk} = 0$, para $1 \leq i < j < k \leq n$, donde $\mathcal{NDC}_{ijk} = c_{ik}c_{jk}d_{ij}x_k - x_kd_{ij} + c_{jk}x_jd_{ik} - c_{ij}d_{ik}x_j + d_{jk}x_i - c_{ij}c_{ik}x_id_{jk}$.

De acuerdo con esta definición, las G-álgebras exigen que los coeficientes esten en un campo $\mathbb{K}$ y que éstos conmuten con las variables, mientras que en las extensiones $\sigma - PBW$ los coeficientes están en un anillo con unidad y no necesariamente conmutan con las variables. Adicionalmente, en las extensiones $\sigma - PBW$ la identidad que permite escribir x_jx_i con $i < j$ en términos de x_ix_j no está condicionada a un orden monomial.

A pesar de que una estructura no generaliza a la otra y viceversa, hay algunas álgebras que se pueden clasificar como G-álgebras y como extensiones $\sigma - PBW$, por ejemplo, el álgebra envolvente de un álgebra de Lie finito dimensional, las álgebras de Weyl, el análogo aditivo de un álgebra de Weyl y el análogo multiplicativo de un álgebra de Weyl.

CAPÍTULO 2

Bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$

En este capítulo se presenta la teoría de las bases de Gröbner para submódulos del A-módulo libre izquierdo A^m de vectores columna de longitud $m \geq 1$, donde $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ es una extensión $\sigma - PBW$ de R, con R un anillo GSI (véase definición 2.2.1) y $Mon(A)$ dotado con algún órden monomial. La condición de noetherianidad sobre R es importante para fórmular la teoría, pues al tener que R es un anillo noetheriano, A también es un anillo neoetheriano (teorema 1.2.3), y por tanto A es dimensional (es decir, A satisface la propiedad de que todo A-módulo libre tiene único rango, [15]), entonces todas las bases de del módulo libre A^m tienen m elementos. Además, A^m es un A-módulo noetheriano a izquierda, lo que permite asegurar que el algoritmo que calcula bases de Gröbner para sus submódulos, termina.

El plan de trabajo a seguir es definir monomios en A^m y órdenes sobre estos monomios, para así introducir el concepto de reducción y construir un algoritmo de división; dar caracterizaciones equivalentes de una base de Gröbner y finalmente, calcular bases de Gröbner usando un procedimiento similar al algoritmo de Buchberguer, en el caso particular de las extensiones $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativas biyectivas.

Los resultados presentados en este capítulo generalizan el trabajo expuesto en [9] donde se estudian las bases de Gröbner para ideales izquierdos de extensiones $\sigma - PBW$.

2.1. Órdenes monomiales sobre $Mon(A^m)$

Como se mencionó anteriormente, A^m consiste de todos los vectores columna con entradas en A de longitud m, sin embargo, en este capítulo, con el fin de facilitar la escritura, los elementos de A^m serán representados por vectores fila. Es de anotar que la base canónica de A^m es

$$\boldsymbol{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e_m} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Definición 2.1.1. *i. Un monomio en A^m es un vector $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$ donde $X = x^\alpha \in Mon(A)$ y $1 \leq i \leq m$, es decir, $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i} = (0, \ldots, 0, X, 0, \ldots, 0)$ donde X está en la $i-$ésima posición.*

ii. El índice de $\boldsymbol{X}$, notado $ind(\boldsymbol{X}) := i$, donde $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$.

iii. Un término es un vector $c\boldsymbol{X}$ donde $c \in R$.

iv. El conjunto de monomios de A^m se denota por $Mon(A^m)$.

v. El exponente de $\boldsymbol{X}$, notado $exp(\boldsymbol{X}) := exp(X) = \alpha$.

vi. El grado de $\boldsymbol{X}$, notado $deg(\boldsymbol{X}) := deg(X) =\mid \alpha \mid$.

vii. Sean $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$ y $\boldsymbol{Y} = Y\boldsymbol{e_j}$, se dirá que $\boldsymbol{X}$ divide a $\boldsymbol{Y}$ si $i = j$ y $X divide a Y$. (X divide a Y si dado $X = x^\alpha$ y $Y = x^\beta$, existe un único x^θ en $Mon(A)$ tal que $x^\beta = lm(x^\theta x^\alpha) = x^{\theta+\alpha}$ y por tanto $\beta = \theta + \alpha$).

viii. El mínimo común múltiplo de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$, denotado por $mcm(X, Y)$ es

- $\boldsymbol{0}$ *si $i \neq j$*
- $U\boldsymbol{e_i}$ *donde $U = mcm(X, Y)$ si $i = j$*

(Dado $X = x^\alpha$ y $Y = x^\beta$, el $mcm(x^\alpha, x^\beta) = x^\gamma \in Mon(A)$, donde $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ con $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para cada $1 \leq i \leq n$).

Ahora se definen los órdenes monomiales sobre $Mon(A^m)$.

Definición 2.1.2. *Un orden monomial sobre $Mon(A^m)$ es un orden total $\succeq$ que satisface las siguientes tres condiciones:*

i. Para todo monomio $\boldsymbol{X} = x^{\alpha}\boldsymbol{e_i} \in Mon(A^m)$ y todo monomio $x^{\beta} \in Mon(A)$, se tiene que

$$lm(x^{\beta}x^{\alpha})\boldsymbol{e_i} \succeq x^{\alpha}\boldsymbol{e_i}.$$

ii. Para todo monomio $\boldsymbol{X} = x^{\alpha}\boldsymbol{e_i}$ y $\boldsymbol{Y} = x^{\beta}\boldsymbol{e_j}$ en $Mon(A^m)$ y todo monomio $x^{\gamma} \in Mon(A)$, se tiene que

$$Si\ \boldsymbol{Y} \succeq \boldsymbol{X}\ entonces\ lm(x^{\gamma}x^{\beta})\boldsymbol{e_j} \succeq lm(x^{\gamma}x^{\alpha})\boldsymbol{e_i}.$$

iii. $\succeq$ es grado compatible, es decir,

$$Si\ deg(\boldsymbol{X}) \succeq deg(\boldsymbol{Y})\ entonces\ \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{Y}.$$

Si $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{Y}$ pero $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$ se escribirá $\boldsymbol{X} \succ \boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{X} \preceq \boldsymbol{Y}$ es lo mismo que $\boldsymbol{Y} \succeq \boldsymbol{X}$.

De la condición *iii.* de la definición anterior, se obtiene que no existen cadenas infinitas estrictamente decrecientes de monomios en A^m, es decir, da lugar al teorema formulado a continuación, el cual será fundamental para probar que el algoritmo de división en A^m termina.

Teorema 2.1.1. *Todo orden monomial sobre $Mon(A^m)$ es un buen orden.*

Demostración: Sea $\succeq$ un orden monomial sobre $Mon(A^m)$ que no es un buen orden, es decir, en $Mon(A^m)$ existe una cadena descendente de monomios

$$\boldsymbol{X_1} \succ \boldsymbol{X_2} \succ \ldots \succ \boldsymbol{X_m} \succ \ldots$$

Como $\succeq$ es grado compatible, entonces se tiene la siguiente cadena descendente en $\mathbb{N}$,

$$deg(\boldsymbol{X_1}) > deg(\boldsymbol{X_2}) > \ldots > deg(\boldsymbol{X_m}) > \ldots$$

pero esto es una contradicción, pues $\mathbb{N}$ es bien ordenado. Por tanto, $\succeq$ es un buen orden sobre $Mon(A^m)$. $\square$

Dado un orden monomial sobre $Mon(A)$ se pueden definir dos órdenes monomiales sobre $Mon(A^m)$, como se muestra a continuación:

Definición 2.1.3. *Sean $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$ y $\boldsymbol{Y} = Y\boldsymbol{e_j}$ en $Mon(A^m)$. Luego:*

i. El orden TOP (término sobre posición) definido como

$$\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} X \succeq Y \\ o \\ X = Y \;\; y \; i > j \end{cases}$$

ii. El orden TOPREV definido como

$$\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} X \succeq Y \\ o \\ X = Y \;\; y \; i < j \end{cases}$$

Dado un orden monomial $\succeq$ sobre $Mon(A^m)$, todo vector $\boldsymbol{f} \neq 0$ en A^m se puede escribir como una suma de términos, así:

$$\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{X_1} + \cdots + c_t\boldsymbol{X_t}$$

donde $c_1, \ldots, c_t \in R - \{0\}$ y $\boldsymbol{X_1} \succ \boldsymbol{X_2} \succ \ldots \succ \boldsymbol{X_t}$ son monomios de $Mon(A^m)$. Esta escritura de $\boldsymbol{f}$ da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.1.4. *Sea $\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{X_1} + \cdots + c_t\boldsymbol{X_t}$ con $\boldsymbol{X_1} \succ \boldsymbol{X_2} \succ \ldots \succ \boldsymbol{X_t}$. Se dice que*

i. $lt(\boldsymbol{f}) = c_1\boldsymbol{X_1}$ es el término principal de $\boldsymbol{f}$.

ii. $lc(\boldsymbol{f}) = c_1$ es el coeficiente principal de $\boldsymbol{f}$.

iii. $lm(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{X_1}$ es el monomio principal de $\boldsymbol{f}$.

Si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, se tiene que $lm(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$; $lc(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ y $lt(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, estableciendo además que $\boldsymbol{X} \succ \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{X} \in Mon(A^m)$. De esta manera se extiende el orden monomial $\succeq$ a $Mon(A^m) \cup \{\boldsymbol{0}\}$.

2.2. Proceso de reducción en $Mon(A^m)$

Antes de dar los elementos necesarios para formular una teoría de bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$, es necesario asumir algunas condiciones computacionales sobre R, con el fin de garantizar una teoría de Gröbner en el anillo de coeficientes, en particular, para tener una solución efectiva del problema de membresía en R, como se requiere en la definición de reducción en A^m y para garantizar que el algortimo para calcular bases de Gröbner presentado posteriormente se pueda implemetar.

Definición 2.2.1. *Un anillo R se denomina Gröbner soluble a izquierda (GSI) si las siguientes condiciones se cumplen:*

i. *R es Noetheriano a izquierda.*

ii. *Dados $a, r_1, \ldots, r_m \in R$ existe un algoritmo que decide si a está en el ideal $Rr_1 + \cdots + Rr_m$, y de ser así, encuentra elementos $b_1, \ldots, b_m \in R$ tales que $a = b_1r_1 + \cdots + b_mr_m$.*

iii. *Dados $r_1, \ldots, r_m \in R$ existe un algoritmo que encuentra un conjunto finito de generadores para el R-módulo izquierdo*

$$Syz_R[r_1 \cdots r_m] := \{(b_1, \ldots, b_m) \in R^m \mid b_1r_1 + \cdots + b_mr_m = 0\}.$$

Algunos anillos que satisfacen estas condiciones son un campo cualquiera, un dominio de ideales principales, el anillo de polinomios usual sobre un campo, o en general, cualquier anillo en el cual exista una teoría efectiva de bases de Gröbner. En adelante en el presente documento, se asumirá que $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ es una extensión $\sigma - PBW$ del anillo R, con R un anillo GSI, y que $Mon(A)$ está dotado con algún orden monomial. El proceso de reducción en A^m es definido como se muestra a continuación.

Definición 2.2.2. *Sean F un conjunto finito de vectores de A^m diferentes de $\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} \in A^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ se reduce a $\boldsymbol{h}$ por F en un paso, notado $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}$, si existen elementos $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t} \in F$ y $r_1, \ldots, r_t \in R$ tales que*

i. *$lm(\boldsymbol{f_i}) \mid lm(\boldsymbol{f})$ con $1 \leq i \leq t$, es decir, $ind(lm(\boldsymbol{f_i})) = ind(lm(\boldsymbol{f}))$ y existe $x^{\alpha_i} \in Mon(A)$ tal que $x^{exp(lm(\boldsymbol{f}))} = lm(x^{\alpha_i}x^{exp(lm(\boldsymbol{f_i}))})$, esto es, $exp(lm(\boldsymbol{f})) = \alpha_i + exp(lm(\boldsymbol{f_i}))$.*

ii. $lc(\boldsymbol{f}) = r_1\sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\alpha_1,\boldsymbol{f_1}} + \cdots + r_t\sigma^{\alpha_t}(lc(\boldsymbol{f_t}))c_{\alpha_t,\boldsymbol{f_t}}$, *donde* $c_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}} = c_{\alpha_i,exp(lm(\boldsymbol{f_i}))}$.

iii. $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t} r_i x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i}$.

Algunas observaciones relacionadas con la definición anterior son:

i. Por el teorema 1.2.2 los coeficientes $c_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}}$ son únicos y satisfacen que

$$x^{\alpha_i}x^{exp(lm(\boldsymbol{f_i}))} = c_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}}x^{\alpha_i+exp(lm(\boldsymbol{f_i}))} + p_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}},$$

donde $p_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}} = \mathbf{0}$ o $deg(lm(p_{\alpha_i,\boldsymbol{f_i}})) <\mid \alpha_i + exp(lm(\boldsymbol{f_i}))\mid$ con $1 \leq i \leq t$.

ii. $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h})$ y $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h} \in \langle F\rangle$, donde $\langle F\rangle$ es el submódulo de A^m generado por F.

iii. Si $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}$, se tiene que

$$lt(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{t} r_i lt(x^{\alpha_i}lt(\boldsymbol{f_i})).$$

Definición 2.2.3. *Sean F un conjunto finito de vectores de A^m diferentes de $\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} \in A^m$. Se dice que*

i. *$\boldsymbol{f}$ se reduce a $\boldsymbol{h}$ por F, notado $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$ si y sólo si existen vectores $\boldsymbol{h_1}, \ldots, \boldsymbol{h_{t-1}} \in A^m$ tales que*

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_2} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_{t-1}} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}.$$

ii. *$\boldsymbol{f}$ es reducido con respecto a F si $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, o una de las dos primeras condiciones de la definición 2.2.2 falla. De lo contrario se dice que $\boldsymbol{f}$ es reducible con respecto a F.*

iii. *Si $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{h}$ es reducido con respecto a F, se dice que $\boldsymbol{h}$ es el residuo para $\boldsymbol{f}$ con respecto a F.*

iv. *El vector $\mathbf{0}$ se reduce a $\mathbf{0}$ por F en un paso, esto es, $\mathbf{0} \xrightarrow{F} \mathbf{0}$.*

El residuo para $\boldsymbol{f}$ con respecto a F no es único.

De la definición de reducción se obtienen las siguientes propiedades:

Teorema 2.2.1. *Sea A una extensión $\sigma - PBW$ tal que $c_{\alpha,\beta}$ es invertible para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} \in A^m$, $\theta \in \mathbb{N}^n$ y $F = \{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t}\}$ un conjunto finito de vectores no nulos de A^m. Entonces* *i.* *Si* $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}$ *entonces existe* $\boldsymbol{p} \in A^m$ *con* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ *o* $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, *tal que* $x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h}$. *En particular, si* A *es cuasi-conmutativa, entonces* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

ii. *Si* $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$ *y* $\boldsymbol{p} \in A^m$ *es tal que* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ *o* $lm(\boldsymbol{h}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, *entonces* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$.

iii. *Si* $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$ *entonces existe* $\boldsymbol{p} \in A^m$ *con* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ *o* $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, *tal que* $x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F}_+ x^\theta \boldsymbol{h}$. *Si* A *es cuasi-conmutativa, entonces* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

iv. *Si* $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{0}$ *entonces existe* $\boldsymbol{p} \in A^m$ *con* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ *o* $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, *tal que* $x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{0}$. *Si* A *es cuasi-conmutativa, entonces* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Demostración: *i.* Si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{p}$. Sea $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$, como $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}$ entonces por la definición 2.2.2 existen $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t} \in F$ y $r_1, \ldots, r_t \in R$ tales que

- $lm(\boldsymbol{f_i}) \mid lm(\boldsymbol{f})$ con $1 \leq i \leq t$, es decir, $ind(lm(\boldsymbol{f_i})) = ind(lm(\boldsymbol{f}))$ y existe $x^{\alpha_i} \in Mon(A)$ tal que $exp(lm(\boldsymbol{f})) = \alpha_i + exp(lm(\boldsymbol{f_i}))$.
- $lc(\boldsymbol{f}) = r_1 \sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{f_1})) c_{\alpha_1, \boldsymbol{f_1}} + \cdots + r_t \sigma^{\alpha_t}(lc(\boldsymbol{f_t})) c_{\alpha_t, \boldsymbol{f_t}}$.
- $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^t r_i x^{\alpha_i} \boldsymbol{f_i}$.

Sean $\lambda := exp(lm(\boldsymbol{f}))$ y $\beta_i := exp(lm(\boldsymbol{f_i}))$. Ahora se calcula $x^\theta \boldsymbol{f}$:

$$\begin{aligned}
x^\theta \boldsymbol{f} &= x^\theta lc(\boldsymbol{f}) lm(\boldsymbol{f}) + \cdots \\
&= (\sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f})) x^\theta + p_{\theta, lc(\boldsymbol{f})}) lm(\boldsymbol{f}) + \cdots \\
&= \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f})) x^\theta lm(\boldsymbol{f}) + p_{\theta, lc(\boldsymbol{f})} lm(\boldsymbol{f}) + \cdots \\
&= \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f}))(c_{\theta,\lambda} x^{\theta+\lambda} + p_{\theta,\lambda}) \boldsymbol{e_{ind(lm(f))}} + p_{\theta, lc(\boldsymbol{f})} lm(\boldsymbol{f}) + \cdots \\
&= \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f})) c_{\theta,\lambda} x^{\theta+\lambda} \boldsymbol{e_{ind(lm(f))}} + \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f})) p_{\theta,\lambda} \boldsymbol{e_{ind(lm(f))}} + p_{\theta, lc(\boldsymbol{f})} lm(\boldsymbol{f}) + \cdots
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que $lt(x^\theta \boldsymbol{f}) = \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f})) c_{\theta,\lambda} x^{\theta+\lambda} \boldsymbol{e_{ind(lm(f))}}$, luego

$$ind(lm(\boldsymbol{f})) = ind(lm(x^\theta \boldsymbol{f}))$$

$$exp(lm(x^\theta \boldsymbol{f})) = \theta + \lambda$$

por tanto, $\theta+\lambda = (\theta+\alpha_i)+\beta_i$ pues $\lambda = \alpha_i+\beta_i$, entonces $lm(\boldsymbol{f_i}) \mid lm(x^\theta \boldsymbol{f})$. Además,

$$\begin{aligned} lc(x^\theta \boldsymbol{f}) &= \sigma^\theta(lc(\boldsymbol{f}))c_{\theta,\lambda} \\ &= \sigma^\theta\left(\sum_{i=1}^{t} r_i\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))c_{\alpha_i,\beta_i}\right)c_{\theta,\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{t} \sigma^\theta(r_i)\sigma^\theta(\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i})))\sigma^\theta(c_{\alpha_i,\beta_i})c_{\theta,\lambda} \end{aligned}$$

Como $\sigma^\theta(\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i})))c_{\theta,\alpha_i} = c_{\theta,\alpha_i}\sigma^{\theta+\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))$ y por hipótesis c_{θ,α_i} es invertible, entonces

$$\begin{aligned} \sigma^\theta(\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))) &= \sigma^\theta(\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i})))c_{\theta,\alpha_i}c_{\theta,\alpha_i}^{-1} \\ &= c_{\theta,\alpha_i}\sigma^{\theta+\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))c_{\theta,\alpha_i}^{-1} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$lc(x^\theta \boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^\theta(r_i)c_{\theta,\alpha_i}\sigma^{\theta+\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))c_{\theta,\alpha_i}^{-1}\sigma^\theta(c_{\alpha_i,\beta_i})c_{\theta,\lambda}.$$

Ahora teniendo en cuenta que $\lambda = \alpha_i + \beta_i$ y que $\sigma^\theta(c_{\alpha_i,\beta_i})c_{\theta,\alpha_i+\beta_i} = c_{\theta,\alpha_i}c_{\theta+\alpha_i,\beta_i}$, se tiene que

$$\begin{aligned} lc(x^\theta \boldsymbol{f}) &= \sum_{i=1}^{t} \sigma^\theta(r_i)c_{\theta,\alpha_i}\sigma^{\theta+\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))c_{\theta+\alpha_i,\beta_i} \\ &= \sum_{i=1}^{t} r_i'\sigma^{\theta+\alpha_i}(lc(\boldsymbol{f_i}))c_{\theta+\alpha_i,\beta_i} \end{aligned}$$

donde $r'_i = \sigma^{\theta}(r_i)c_{\theta,\alpha_i}$. Por otro lado, se tiene que

$$
\begin{aligned}
x^{\theta}\boldsymbol{h} &= x^{\theta}\left(\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t} r_i x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i}\right) \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t} x^{\theta} r_i x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t}\left(\sigma^{\theta}(r_i)x^{\theta} + p_{\theta,r_i}\right)x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t}\sigma^{\theta}(r_i)x^{\theta}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + p_{\theta,r_i}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t}\sigma^{\theta}(r_i)[c_{\theta,\alpha_i}x^{\theta+\alpha_i} + p_{\theta,\alpha_i}]\boldsymbol{f_i} + p_{\theta,r_i}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t}\sigma^{\theta}(r_i)c_{\theta,\alpha_i}x^{\theta+\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + \sigma^{\theta}(r_i)p_{\theta,\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + p_{\theta,r_i}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t} r'_i x^{\theta+\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + \sum_{i=1}^{t}\sigma^{\theta}(r_i)p_{\theta,\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + p_{\theta,r_i}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i} \\
&= x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} - \sum_{i=1}^{t} r'_i x^{\theta+\alpha_i}\boldsymbol{f_i}
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{p} := \sum_{i=1}^{t}\sigma^{\theta}(r_i)p_{\theta,\alpha_i}\boldsymbol{f_i} + p_{\theta,r_i}x^{\alpha_i}\boldsymbol{f_i}$ con $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ o $deg(lm(\boldsymbol{p})) <\mid \theta + \alpha_i + \beta_i \mid = \mid \theta + \lambda \mid = deg(lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}))$, pues $p_{\theta,r_i} = 0$ o $deg(lm(p_{\theta,r_i})) <\mid \theta \mid$ y $p_{\theta,\alpha_i} = 0$ o $deg(lm(p_{\theta,\alpha_i})) <\mid \theta + \alpha_i \mid$. Como $\succeq$ sobre $Mon(A^m)$ es grado compatible, entonces $lm(\boldsymbol{p}) \prec lm(x^{\theta}\boldsymbol{f})$. Además

$$lm(x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p}) = lm(x^{\theta}\boldsymbol{f})$$

$$lc(x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p}) = lc(x^{\theta}\boldsymbol{f})$$

Y por lo mostrado anteriormente, se concluye que

$$x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} x^{\theta}\boldsymbol{h}.$$

Si A es una extension $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, se tiene que $p_{\theta,r_i} = 0$ y $p_{\theta,\alpha_i} = 0$, por tanto, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

ii. Por hipótesis, $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$, luego existen $\boldsymbol{h_1}, \ldots, \boldsymbol{h_t} \in A^m$ tales que

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_2} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_{t-1}} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_t} := \boldsymbol{h}$$

con $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{h_2}) \succ \cdots \succ lm(\boldsymbol{h_{t-1}}) \succ lm(\boldsymbol{h}) \succ lm(\boldsymbol{p})$. Al estudiar la primera reducción, $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1}$, se obtiene: Si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{p}$ y no se tendría que probar algo. Sea $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$, luego si $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ y se cumple la afirmación. Si $\boldsymbol{h_1} \neq \boldsymbol{0}$ entonces $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, por tanto, $lm(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{p}) = lm(\boldsymbol{f})$ y $lc(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{p}) = lc(\boldsymbol{f})$. Como $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{t} r_i x^{\alpha_i} \boldsymbol{f_i}$ entonces

$$\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} - \sum_{i=1}^{t} r_i x^{\alpha_i} \boldsymbol{f_i}$$

y como sucede en la demostración de *i.*, se tiene que

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{p}.$$

Ahora como para todo i con $1 < i \leq t-1$, se cumple que $lm(\boldsymbol{h_i}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, se puede repetir el razonamiento anterior para $\boldsymbol{h_i} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_{i+1}}$ y así obtener que

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_{t-1}} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p},$$

esto es, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$.

iii. Por hipótesis, $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$, luego existen $\boldsymbol{h_1}, \ldots, \boldsymbol{h_t} \in A^m$ tales que

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_2} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_{t-1}} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h}.$$

La prueba se realizará por inducción sobre t:

Para $t = 2$: Por la parte *i.* existe $\boldsymbol{p_1}$ con $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p_1})$, tal que $x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p_1} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h_1}$. Como $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p_1})$ entonces $lm(x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p_1}) = lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(x^\theta \boldsymbol{h_1})$. Por *i.* también existe $\boldsymbol{p_2}$ con $\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^\theta \boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{p_2})$, tal que $x^\theta \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{p_2} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h_2}$.

Ahora como $x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p_1} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h_1}$ y $\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^\theta \boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{p_2})$, por *ii.* se tiene que

$$x^\theta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{p_2} \xrightarrow{F} x^\theta \boldsymbol{h_2},$$

haciendo $\boldsymbol{p''} := \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}$, se obtiene

$$x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p''} \xrightarrow{F}_{+} x^{\theta}\boldsymbol{h_2}$$

con $\boldsymbol{p''} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p''})$, pues $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p_1})$ y $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(x^{\theta}\boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{p_2})$.

Supongamos que la afirmación es cierta para $t-1$, esto es, existe $\boldsymbol{p'} \in A^m$ con $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p'})$, tal que

$$x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p'} \xrightarrow{F}_{+} x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}}.$$

Como $\boldsymbol{h_{t-1}} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_t} := \boldsymbol{h}$, por la parte *i.* existe $\boldsymbol{p_t} \in A^m$ con $\boldsymbol{p_t} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}}) \succ lm(\boldsymbol{p_t})$, tal que $x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}} + \boldsymbol{p_t} \xrightarrow{F} x^{\theta}\boldsymbol{h}$. Por otro lado, como $x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p'} \xrightarrow{F}_{+} x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}}$ y $lm(x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}}) \succ lm(\boldsymbol{p_t})$ o $\boldsymbol{p_t} = \boldsymbol{0}$, por *ii.* se obtiene

$$x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p'} + \boldsymbol{p_t} \xrightarrow{F}_{+} x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}} + \boldsymbol{p_t} \xrightarrow{F} x^{\theta}\boldsymbol{h},$$

haciendo $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p'} + \boldsymbol{p_t}$, se tiene que

$$x^{\theta}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{F}_{+} x^{\theta}\boldsymbol{h}$$

con $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p})$, pues $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p'})$ y como $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{p'}) = lm(x^{\theta}\boldsymbol{f})$, entonces $lm(x^{\theta}\boldsymbol{f}) \succ lm(x^{\theta}\boldsymbol{h_{t-1}}) \succ lm(\boldsymbol{p_t})$.

Si A es una extension $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, se tiene que $\boldsymbol{p'} = 0$ y $\boldsymbol{p_t} = 0$, por tanto, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

iv. Este es un caso particular de la parte *iii.*, haciendo $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$. □

2.2.1. Algoritmo de división en A^m

El teorema que se muestra a continuación es el soporte teórico del algoritmo de división para extensiones $\sigma - PBW$.

Teorema 2.2.2. *Sea $F = \{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t}\}$ un conjunto finito de vectores no nulos de A^m y $\boldsymbol{f} \in A^m$, entonces el siguiente algoritmo de división produce polinomios $q_1, \ldots, q_t \in A$ y* *un vector* $\boldsymbol{h} \in A^m$ *reducido con respecto a* F*, tales que* $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F}_+ \boldsymbol{h}$ *y*

$$\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{f_1} + \cdots + q_t\boldsymbol{f_t} + \boldsymbol{h}$$

con

$$lm(\boldsymbol{f}) = \text{máx}\{lm(lm(q_1)lm(\boldsymbol{f_1})), \ldots, lm(lm(q_t)lm(\boldsymbol{f_t})), lm(\boldsymbol{h})\}.$$

Algoritmo de división en A^m

ENTRADA: $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t} \in A^m$ con $\boldsymbol{f_j} \neq \boldsymbol{0}$, $1 \leq j \leq t$.

SALIDA: $q_1, \ldots, q_t \in A$, $\boldsymbol{h} \in A^m$ tales que $\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{f_1} + \cdots + q_t\boldsymbol{f_t} + \boldsymbol{h}$

con $\boldsymbol{h}$ reducido con respecto a $\{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_t}\}$ y

$lm(\boldsymbol{f}) = \text{máx}\{lm(lm(q_1)lm(\boldsymbol{f_1})), \ldots, lm(lm(q_t)lm(\boldsymbol{f_t})), lm(\boldsymbol{h})\}$.

INICIO: $q_1 := 0, q_2 := 0, \ldots, q_t := 0, \boldsymbol{h} := \boldsymbol{f}$.

MIENTRAS $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ y exista $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $lm(\boldsymbol{f_j})$ divide a $lm(\boldsymbol{h})$

HACER: Calcule $J = \{j \mid lm(\boldsymbol{f_j}) \text{ divide a } lm(\boldsymbol{h})\}$

PARA $j \in J$ **HACER**

Calcule $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$ tal que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{f_j})) = exp(lm(\boldsymbol{h}))$

SI la ecuación $lc(\boldsymbol{h}) = \sum_{j\in J} r_j\sigma^{\alpha_j}(lc(\boldsymbol{f_j}))c_{\alpha_j,\boldsymbol{f_j}}$ es soluble,

con los $c_{\alpha_j,\boldsymbol{f_j}}$ definidos como en la definición 2.2.2

ENTONCES

Calcule una solución $(r_j)_{j\in J}$

$\boldsymbol{h} := \boldsymbol{h} - \sum_{j\in J} r_j x^{\alpha_j}\boldsymbol{f_j}$

PARA $j \in J$ **HACER**

$q_j := q_j + r_j x^{\alpha_j}$

EN OTRO CASO

Terminar.

Demostración: El algoritmo de división presentado es la iteración del proceso de reducción: Si $\boldsymbol{f}$ es reducido con respecto a F, es decir, si las condiciones del ciclo MIENTRAS no se tienen, entonces $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}$, $q_1 = 0 = q_2 = \cdots = q_t$ y $lm(\boldsymbol{f}) = lm(\boldsymbol{h})$.

Si $\boldsymbol{f}$ no es reducido con respecto a F, entonces se hace la primera reducción, $\boldsymbol{f} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_1}$ con $\boldsymbol{f} = \sum_{j\in J_1} r_{j1}x^{\alpha_j}\boldsymbol{f_j} + \boldsymbol{h_1}$, donde $J_1 = \{j \mid lm(\boldsymbol{f_j}) \text{ divide a } lm(\boldsymbol{f})\}$ y $r_{j1} \in R$.

Si $\boldsymbol{h_1}$ es reducido con respecto a F, entonces el ciclo MIENTRAS termina y por tanto, $q_j = r_{j1}x^{\alpha_j}$ para $j \in J_1$ y $q_j = 0$ para $j \neq J_1$. Además $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1})$ y $lm(\boldsymbol{f}) = \text{máx}\{lm(lm(q_1)lm(\boldsymbol{f_1})), \ldots, lm(lm(q_t)lm(\boldsymbol{f_t})), lm(\boldsymbol{h_1})\}$.

Si $\boldsymbol{h_1}$ no es reducido con respecto a F, entonces se hace la segunda reducción, $\boldsymbol{h_1} \xrightarrow{F} \boldsymbol{h_2}$ con $\boldsymbol{h_1} = \sum_{j\in J_2} r_{j2}x^{\alpha_j}\boldsymbol{f_j} + \boldsymbol{h_2}$, donde $J_2 = \{j \mid lm(\boldsymbol{f_j}) \text{ divide a } lm(\boldsymbol{h_1})\}$ y $r_{j2} \in R$. Por tanto se tiene que $\boldsymbol{f} = \sum_{j\in J_1} r_{j1}x^{\alpha_j}\boldsymbol{f_j} + \sum_{j\in J_2} r_{j2}x^{\alpha_j}\boldsymbol{f_j} + \boldsymbol{h_2}$.

Si $\boldsymbol{h_2}$ es reducido con respecto a F, entonces el procedimiento finaliza y tenemos que $q_j = q_j$ para $j \neq J_2$ y $q_j = q_j + r_{j2}x^{\alpha_j}$ para $j \in J_2$. También $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{h_2})$, luego $lm(\boldsymbol{f}) = \text{máx}\{lm(lm(q_1)lm(\boldsymbol{f_1})), \ldots, lm(lm(q_t)lm(\boldsymbol{f_t})), lm(\boldsymbol{h_2})\}$.

Se puede seguir de esa manera, teniendo en cuenta que el proceso termina debido a que $Mon(A^m)$ está bien ordenado. □

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento mencionado anteriormente:

Ejemplo 2.2.1. En el álgebra de 2-Heisenberg, $h_1(2) = \sigma(\mathbb{Q}) < x, y, z >= A$, en $Mon(A)$ se considera el orden deglex con $x > y > z$ y en $Mon(A^3)$ el orden TOPREV con $\boldsymbol{e_1} \succ \boldsymbol{e_2} \succ \boldsymbol{e_3}$. Sean $\boldsymbol{f} := x^2yz\boldsymbol{e_1} + xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_1} := xz\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + x\boldsymbol{e_3}$ y $\boldsymbol{f_2} := xy\boldsymbol{e_1} + z\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$, para $\boldsymbol{f}$ se encontrarán q_1, q_2, q_3 y $\boldsymbol{h}$ siguiendo el algoritmo de división.

Paso 1: Se inicia con $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{f}, q_1 := 0, q_2 := 0$, como $lm(\boldsymbol{f_1}) \mid lm(\boldsymbol{h})$ y $lm(\boldsymbol{f_2}) \mid lm(\boldsymbol{h})$, se calculan vectores $\alpha_j \in \mathbb{N}^3$ tales que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{f_j})) = exp(lm(\boldsymbol{h}))$, con $j = 1, 2$:

- $t^{\alpha_1}lm(\boldsymbol{f_1}) = lm(\boldsymbol{h})$ esto es, $t^{\alpha_1}(xz\boldsymbol{e_1}) = x^2yz\boldsymbol{e_1}$, entonces $(x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}z^{\alpha_{13}})(xz) = x^2yz$, por tanto $\alpha_{11} = 1$; $\alpha_{12} = 1$; $\alpha_{13} = 0$, entonces $t^{\alpha_1} = xy$.

- $t^{\alpha_2}lm(\boldsymbol{f_2}) = lm(\boldsymbol{h})$ esto es, $t^{\alpha_2}(xy\boldsymbol{e_1}) = x^2yz\boldsymbol{e_1}$, entonces $(x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}z^{\alpha_{23}})(xy) = x^2yz$, por tanto $\alpha_{21} = 1$; $\alpha_{22} = 0$; $\alpha_{23} = 1$, entonces $t^{\alpha_2} = xz$.

Ahora para $j = 1, 2$ se calculan los $c_{\alpha_j, \boldsymbol{f_j}}$:

- $t^{\alpha_1}t^{exp(lm(\boldsymbol{f_1}))} = (xy)(xz) = x(2xy)z = 2x^2yz$. Luego $c_{\alpha_1, \boldsymbol{f_1}} = 2$.

- $t^{\alpha_2}t^{exp(lm(\boldsymbol{f_2}))} = (xz)(xy) = x(\frac{1}{2}xz + y)y = \frac{1}{2}x^2zy + xy^2 = x^2yz + xy^2$. Luego $c_{\alpha_2, \boldsymbol{f_2}} = 1$.

A continuación se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned}1 = lc(\boldsymbol{h}) &= r_1\sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\alpha_1,\boldsymbol{f_1}} + r_2\sigma^{\alpha_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\alpha_2,\boldsymbol{f_2}}\\ &= r_1\sigma^{\alpha_1}(1)2 + r_2\sigma^{\alpha_2}(1)1\\ &= 2r_1 + r_2\end{aligned}$$

entonces, $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$.

Luego se hace $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{h} - (r_1t^{\alpha_1}\boldsymbol{f_1} + r_2t^{\alpha_2}\boldsymbol{f_2})$, esto es,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h} &:= \boldsymbol{h} - (xz(xy\boldsymbol{e_1} + z\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}))\\ &= \boldsymbol{h} - (xzxy\boldsymbol{e_1} + xz^2\boldsymbol{e_2} + xz^2\boldsymbol{e_3})\\ &= \boldsymbol{h} - ((x^2yz + xy^2)\boldsymbol{e_1} + xz^2\boldsymbol{e_2} + xz^2\boldsymbol{e_3})\\ &= x^2yz\boldsymbol{e_1} + xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - x^2yz\boldsymbol{e_1} - xy^2\boldsymbol{e_1} - xz^2\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_3}\\ &= xz\boldsymbol{e_1} - xy^2\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3},\end{aligned}$$

y se calcula también $q_1 := q_1 + r_1t^{\alpha_1} = 0$ y $q_2 := q_2 + r_2t^{\alpha_2} = xz$.

Paso 2: $\boldsymbol{h} := xz\boldsymbol{e_1} - xy^2\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3}$, con $lm(\boldsymbol{h}) = xy^2\boldsymbol{e_1}$ y $lc(\boldsymbol{h}) = -1$, $q_1 = 0$ y $q_2 = xz$. Como $lm(\boldsymbol{f_2}) \mid lm(\boldsymbol{h})$, se calcula $\alpha_2 \in \mathbb{N}^3$ tal que $\alpha_2 + exp(lm(\boldsymbol{f_2})) = exp(lm(\boldsymbol{h}))$:

- $t^{\alpha_2}lm(\boldsymbol{f_2}) = lm(\boldsymbol{h})$ esto es, $t^{\alpha_2}(xy\boldsymbol{e_1}) = xy^2\boldsymbol{e_1}$, entonces $(x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}z^{\alpha_{23}})(xy) = xy^2$, por tanto $\alpha_{21} = 0$; $\alpha_{22} = 1$; $\alpha_{23} = 0$, entonces $t^{\alpha_2} = y$.

Ahora se calcula $c_{\alpha_2,\boldsymbol{f_2}}$:

- $t^{\alpha_2}t^{exp(lm(\boldsymbol{f_2}))} = y(xy) = 2xy^2$. Luego $c_{\alpha_2,\boldsymbol{f_2}} = 2$.

A continuación se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned}-1 = lc(\boldsymbol{h}) &= r_2\sigma^{\alpha_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\alpha_2,\boldsymbol{f_2}}\\ &= r_2\sigma^{\alpha_2}(1)2 = 2r_2\end{aligned}$$

entonces, $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Luego se hace $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{h} - r_2 t^{\alpha_2} \boldsymbol{f_2}$, esto es,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &:= \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}y(xy\boldsymbol{e_1} + z\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}) \\
&= \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}yxy\boldsymbol{e_1} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3}) \\
&= xz\boldsymbol{e_1} - xy^2\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3} + xy^2\boldsymbol{e_1} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3} \\
&= xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3}
\end{aligned}$$

y se calcula $q_1 := 0$ y $q_2 := q_2 + r_2 t^{\alpha_2} = xz - \frac{1}{2}y$.

Paso 3: $\boldsymbol{h} = xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3}$ con $lm(\boldsymbol{h}) = xz^2\boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{h}) = -1$, $q_1 = 0$ y $q_2 = xz - \frac{1}{2}y$. Como $lm(\boldsymbol{f_1})$ no divide a $lm(\boldsymbol{h})$, ni $lm(\boldsymbol{f_2})$ divide a $lm(\boldsymbol{h})$, se tiene que $\boldsymbol{h}$ es reducido con respecto a $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$, por tanto el algoritmo se detiene.

Entonces se han obtenido $q_1, q_2 \in A$ y $\boldsymbol{h} \in A^3$ tales que $\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{f_1} + q_2\boldsymbol{f_2} + \boldsymbol{h}$ con $\boldsymbol{h}$ reducido con respecto a $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$, como se verifica a continuación:

$$\begin{aligned}
q_1\boldsymbol{f_1} &+ q_2\boldsymbol{f_2} + \boldsymbol{h} = 0\boldsymbol{f_1} + \left(xz - \frac{1}{2}y\right)\boldsymbol{f_2} + \boldsymbol{h} \\
&= (xz - \frac{1}{2}y)(xy\boldsymbol{e_1} + z\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}) + xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} \\
&\quad - xz^2\boldsymbol{e_3} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3} \\
&= x^2yz\boldsymbol{e_1} + xy^2\boldsymbol{e_1} - xy^2\boldsymbol{e_1} + xz^2\boldsymbol{e_2} - \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + xz^2\boldsymbol{e_3} - \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3} + xz\boldsymbol{e_1} \\
&\quad + y^2z\boldsymbol{e_2} - xz^2\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} - xz^2\boldsymbol{e_3} + \frac{1}{2}yz\boldsymbol{e_3} \\
&= x^2yz\boldsymbol{e_1} + xz\boldsymbol{e_1} + y^2z\boldsymbol{e_2} + z^2\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{f}.
\end{aligned}$$

Además, $\max\{lm(lm(q_1)lm(\boldsymbol{f_1})), lm(lm(q_2)lm(\boldsymbol{f_2})), lm(\boldsymbol{h})\} = \max\{0, x^2yz\boldsymbol{e_1}, xz^2\boldsymbol{e_2}\}$ $= x^2yz\boldsymbol{e_1} = lm(\boldsymbol{f})$.

2.3. Bases de Gröbner para submódulos de A^m

A continuación se presenta una definición de bases de Gröbner para submódulos de A^m y algunas caracterizaciones de dichas bases.

Definición 2.3.1. *Sea $M \neq 0$ un submódulo de A^m y sea G un subconjunto no vacío de vectores no nulos de M. Se dice que G es una base de Gröbner para M si cada elemento*

$\boldsymbol{f} \in M$ con $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$ es reducible con respecto a G (es decir, si existe $\boldsymbol{h} \in A^m$ tal que $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G} \boldsymbol{h}$). También se dice que $\{\boldsymbol{0}\}$ es una base de Gröbner para $M = 0$.

Teorema 2.3.1. *Sea $M \neq 0$ un submódulo de A^m y sea G un subconjunto no vacío de vectores no nulos de M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. G es una base de Gröbner para M.

ii. Para todo vector $\boldsymbol{f} \in A^m$

$$\boldsymbol{f} \in M \text{ si y sólo si } \boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_{+} \boldsymbol{0}.$$

iii. Para todo $\boldsymbol{f} \in M$ con $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$, existen $\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_t} \in G$ tales que $lm(\boldsymbol{g_j}) \mid lm(\boldsymbol{f})$, $1 \leq j \leq t$ (es decir, $ind(lm(\boldsymbol{g_j})) = ind(lm(\boldsymbol{f}))$ y existen $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$ tales que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{g_j}) = exp(lm(\boldsymbol{f})))$ y $lc(\boldsymbol{f}) \in \langle \sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{g_1}))c_{\alpha_1,\boldsymbol{g_1}}, \ldots, \sigma^{\alpha_t}(lc(\boldsymbol{g_t}))c_{\alpha_t,\boldsymbol{g_t}} \rangle$.

iv. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $1 \leq u \leq m$, sea $\langle \alpha, M \rangle_u$ el ideal izquierdo de R definido por

$$\langle \alpha, M \rangle_u := \langle lc(\boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in M, ind(lm(\boldsymbol{f})) = u, exp(lm(\boldsymbol{f})) = \alpha \rangle.$$

Entonces $\langle \alpha, M \rangle_u = J_u$, con

$$J_u := \langle \sigma^{\beta}(lc(\boldsymbol{g}))c_{\beta,\boldsymbol{g}} \mid \boldsymbol{g} \in G, ind(lm(\boldsymbol{g})) = u \text{ y } \beta + exp(lm(\boldsymbol{g})) = \alpha \rangle.$$

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii.: Sea $\boldsymbol{f} \in M$. Si $\boldsymbol{f} = 0$ entonces por definición $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_{+} \boldsymbol{0}$. Si $\boldsymbol{f} \neq 0$, por i) y la definición 2.3.1, existe $\boldsymbol{h_1} \in A^m$ tal que $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G} \boldsymbol{h_1}$. con $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1})$ y $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h_1} \in \langle G \rangle \subseteq M$, por tanto $\boldsymbol{h_1} \in M$.

Si $\boldsymbol{h_1} = 0$ entonces $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G} \boldsymbol{0}$. Si $\boldsymbol{h_1} \neq 0$, entonces se repite el razonamiento anterior para $\boldsymbol{h_1}$, esto es, por la definición 2.3.1, existe $\boldsymbol{h_2} \in A^m$ tal que $\boldsymbol{h_1} \xrightarrow{G} \boldsymbol{h_2}$ con $lm(\boldsymbol{h_1}) \succ lm(\boldsymbol{h_2})$ y $\boldsymbol{h_1} - \boldsymbol{h_2} \in \langle G \rangle \subseteq M$, por tanto $\boldsymbol{h_2} \in M$.

Luego si $\boldsymbol{h_2} = 0$ entonces $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G} \boldsymbol{h_1} \xrightarrow{G} \boldsymbol{0}$, es decir $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_{+} \boldsymbol{0}$. Si $\boldsymbol{h_2} \neq 0$, entonces se repite el razonamiento. Como $Mon(A^m)$ es bien ordenado, este proceso termina, esto significa que se puede encontrar un $\boldsymbol{h_i}$ tal que $\boldsymbol{h_i} = 0$. Si esto no fuera así, se tendría la cadena infinita decreciente $lm(\boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{h_1}) \succ \cdots \succ lm(\boldsymbol{h_i}) \succ \cdots$ Por tanto $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_{+} \boldsymbol{0}$.

Sea $\boldsymbol{f} \in A^m$. Si $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$ entonces por el algoritmo de la división, teorema 2.2.2, existen $\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_t} \in G$ y $q_1, \ldots, q_t \in A$ tales que $\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{g_1} + \cdots + q_t\boldsymbol{g_t}$ y en consecuencia $\boldsymbol{f} \in M$.

ii. $\Rightarrow$ *i.*: Sea $\boldsymbol{f} \in M$, entonces $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$, y por lo tanto $\boldsymbol{f}$ es reducible con respecto a G.

i. $\Leftrightarrow$ *iii.*: Es una consecuencia directa de la definición 2.2.2.

iii. $\Rightarrow$ *iv.*: Como R es Noetheriano, entonces existen $r_1, \ldots, r_s \in R$ tales que $\langle \alpha, M\rangle_u = \langle r_1, \ldots, r_s\rangle$. Por la definición de $\langle \alpha, M\rangle_u$, existen $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_l} \in M$ con $ind(lm(\boldsymbol{f_i})) = u$ y $exp(lm(\boldsymbol{f_i})) = \alpha$ para cada $1 \leq i \leq l$, con $\langle r_1, \ldots, r_s\rangle \subseteq \langle lc(\boldsymbol{f_1}), \ldots, lc(\boldsymbol{f_l})\rangle$. Como $\langle lc(\boldsymbol{f_1}), \ldots, lc(\boldsymbol{f_l})\rangle \subseteq \langle \alpha, M\rangle_u$, entonces $\langle lc(\boldsymbol{f_1}), \ldots, lc(\boldsymbol{f_l})\rangle = \langle \alpha, M\rangle_u$.

Sea $r \in \langle \alpha, M\rangle_u$, entonces existen $a_1, \ldots, a_l \in R$ tales que $r = a_1 lc(\boldsymbol{f_1}) + \cdots + a_l lc(\boldsymbol{f_l})$. Por iii) para cada $\boldsymbol{f_i}$ con $1 \leq i \leq l$, existen $\boldsymbol{g_{1i}}, \ldots, \boldsymbol{g_{t_i i}}\ inG$ y $b_{ij} \in R$ con $1 \leq j \leq t_i$ tales que

$$lc(\boldsymbol{f_i}) = b_{1i}\sigma^{\alpha_{1i}}(lc(\boldsymbol{g_{1i}})c_{\alpha_{1i},\boldsymbol{g_{1i}}} + \cdots + b_{t_i i}\sigma^{\alpha_{t_i i}}(lc(\boldsymbol{g_{t_i i}})c_{\alpha_{t_i i},\boldsymbol{g_{t_i i}}}$$

con $u = ind(lm(\boldsymbol{f_i})) = ind(lm(\boldsymbol{g_{ji}}))$ y $exp(lm(\boldsymbol{f_i})) = \alpha_{ji} + exp(lm(\boldsymbol{g_{ji}}))$. Por tanto $r \in J_u$, es decir $\langle \alpha, M\rangle_u \subseteq J_u$.

Sea $r \in J_u$ entonces $r = b_1\sigma^{\beta_1}(lc(\boldsymbol{g_1})c_{\beta_1,\boldsymbol{g_1}} + \cdots + b_t\sigma^{\beta_t}(lc(\boldsymbol{g_t})c_{\beta_t,\boldsymbol{g_t}}$ con $b_i \in R, \beta_i \in \mathbb{N}^n, \boldsymbol{g_i} \in G$ tales que $ind(lm(\boldsymbol{g_i})) = u$ y $\beta_i + exp(lm(\boldsymbol{g_i})) = \alpha$ con $1 \leq i \leq t$. Como $x^{\beta_i}\boldsymbol{g_i} \in M$, entonces $ind(lm(x^{\beta_i}\boldsymbol{g_i})) = u$, $exp(lm(x^{\beta_i}\boldsymbol{g_i})) = \beta_i + exp(lm(\boldsymbol{g_i})) = \alpha$, $lc(x^{\beta_i}\boldsymbol{g_i}) = \sigma^{\beta_i}(lc(\boldsymbol{g_i})c_{\beta_i,\boldsymbol{g_i}}))$ para todo $1 \leq i \leq t$, entonces $r = b_1 lc(x^{\beta_1}\boldsymbol{g_1}) + \cdots + b_t lc(x^{\beta_t}\boldsymbol{g_t})$, es decir, $r \in \langle \alpha, M\rangle_u$. Por tanto $\langle \alpha, M\rangle_u = J_u$.

iv. $\Rightarrow$ *iii.*: Sea $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{f} \in M$ con $ind(lm(\boldsymbol{f})) = u$ y $exp(lm(\boldsymbol{f})) = \alpha$, entonces $lc(\boldsymbol{f}) \in \langle \alpha, M\rangle_u$. Por *iv.* se tiene que $lc(\boldsymbol{f}) = b_1\sigma^{\beta_1}(lc(\boldsymbol{g_1})c_{\beta_1,\boldsymbol{g_1}} + \cdots + b_t\sigma^{\beta_t}(lc(\boldsymbol{g_t}))c_{\beta_t,\boldsymbol{g_t}}$ con $b_i \in R, \beta_i \in \mathbb{N}^n, \boldsymbol{g_i} \in G$ tales que $u = ind(lm(\boldsymbol{g_i}))$ y $\beta_i + exp(lm(\boldsymbol{g_i})) = \alpha$ para todo $1 \leq i \leq t$, esto es, $lm(\boldsymbol{g_i}) \mid lm(\boldsymbol{f})$. □

Del teorema 2.3.1 se obtienen las siguientes consecuencias.

Corolario 2.3.1. *Sea $M \neq 0$ un submódulo de A^m. Entonces se cumple que:*

i. Si G es una base de Gröbner para M entonces $M = \langle G\rangle$.

ii. Sea G una base de Gröbner para M, si $\boldsymbol{f} \in M$ y $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{h}$ con $\boldsymbol{h}$ reducido con respecto a G, entonces $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$.

iii. *Sea* $G = \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_t}\}$ *un conjunto de vectores no nulos de* M *con* $lc(\boldsymbol{g_i}) = 1$*, para cada* $1 \leq i \leq t$*, tal que dado* $r \in M$ *existe* i *tal que* $lm(\boldsymbol{g_i})$ *divide a* $lm(\boldsymbol{r})$*. Entonces* G *es una base de Gröbner para* M*.*

Demostración. *i.* Esta es una consecuencia del teorema 2.3.1, parte *ii.* pues para todo $\boldsymbol{f} \in M$ se tiene que $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$, es decir, existen $\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_t} \in G$ y $q_1, \ldots, q_t \in A$ tales que $\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{g_1} + \ldots + q_t\boldsymbol{g_t}$.

ii. Sea $\boldsymbol{f} \in M$ y $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{h}$, con $\boldsymbol{h}$ reducido con respecto a G. Como $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h} \in \langle G \rangle = M$, entonces $\boldsymbol{h} \in M$. Si $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$, entonces por definición de base de Gröbner para M, $\boldsymbol{f}$ es reducible con respecto a G, pero esto no es posible pues $\boldsymbol{h}$ es reducido con respecto a G. Por tanto $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$.

iii. Para probar que G es una base de Gröbner para M, se mostrará que se cumple la parte *ii.* del teorema 2.3.1:

Sea $\boldsymbol{f} \in A^m$, por el algoritmo de la división, teorema 2.2.2, existe $\boldsymbol{r}$ reducido con respecto a G, tal que $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{r}$. Si $\boldsymbol{f} \in M$ entonces $\boldsymbol{r} \in M$. Si $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$, entonces por hipótesis, existe $\boldsymbol{g_i} \in G$ tal que $lm(\boldsymbol{g_i})$ divide a $lm(\boldsymbol{r})$. Ahora, como $lc(\boldsymbol{g_i}) = 1$, entonces $\boldsymbol{r}$ es reducible, pues debe darse que $lc(\boldsymbol{r}) = r_i\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{g_i})c_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$ y como $\sigma^{\alpha_i}(lc(\boldsymbol{g_i}) = 1$ entonces $lc(\boldsymbol{r}) = r_i c_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$ y esta ecuación es soluble ya que $c_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$ es invertible a izquierda; donde $r_i = lc(\boldsymbol{r})c'_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$ con $c'_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$ el inverso a izquierda de $c_{\alpha_i,\boldsymbol{g_i}}$. Pero que $\boldsymbol{r}$ sea reducible es una contradicción, luego $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, es decir $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$.

Por otro lado, si $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{f} \in M$. Como se tiene que $\boldsymbol{f} \in M$ si y sólo si $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$, entonces G es una base de Gröbner para M. □

2.3.1. Construcción de bases de Gröbner

En esta sección se probará que todo submódulo M de A^m tiene una base de Gröbner, teniendo en cuenta que A debe ser una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva, además de proporcionar un algoritmo que permita calcular tales bases. Pero primero se fijará alguna notación y se demostrarán unos resultados preliminares válidos para extensiones $\sigma - PBW$ arbitrarias.

Definición 2.3.2. *Sea* $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq A^m$*,y* $\boldsymbol{X_F}$ *es el mínimo común múltiplo de* $\{lm(\boldsymbol{g_1}), \ldots, lm(\boldsymbol{g_s})\}$ *con* $\boldsymbol{X_F} \neq \boldsymbol{0}$*,* $\theta \in \mathbb{N}^n$*,* $\beta_i := exp(lm(\boldsymbol{g_i}))$ *y* $\gamma_i \in \mathbb{N}^n$*, tal que*

$\gamma_i + \beta_i := exp(\boldsymbol{X_F})$, $1 \leq i \leq s$. $B_{F,\theta}$ denotará un conjunto finito de generadores de

$$S_{F,\theta} := Syz_R[\sigma^{\gamma_1+\theta}(lc(\boldsymbol{g_1})c_{\gamma_1+\theta,\beta_1} \ldots \sigma^{\gamma_s+\theta}(lc(\boldsymbol{g_s})c_{\gamma_s+\theta,\beta_s}].$$

Para $\theta = \mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$, $S_{F,\theta}$ se denotará por S_F y $B_{F,\theta}$ por B_F.

Teorema 2.3.2. *Sea $M \neq 0$ un submódulo de A^m y sea G un subconjunto finito de generadores no nulos de M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. G es una base de Gröbner para M.

ii. Para todo $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$, con $\boldsymbol{X_F} \neq \mathbf{0}$, $\theta \in \mathbb{N}^n$ y $(b_1, \ldots, b_s) \in B_{F,\theta}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} b_i x^{\gamma_i+\theta} \boldsymbol{g_i} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}$$

donde $\gamma_i \in \mathbb{N}^n$ es tal que $\gamma_i + exp(lm(\boldsymbol{g_i})) = exp(\boldsymbol{X_F})$.

En particular, si G es una base de Gröbner para M, un submódulo de A^m, entonces para todo $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$ con $\boldsymbol{X_F} \neq \mathbf{0}$ y $(b_1, \ldots, b_s) \in B_F$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} b_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}.$$

Demostración. *i.$\Rightarrow$ ii.*: Como se tiene que $\boldsymbol{f} := \sum_{i=1}^{s} b_i x^{\gamma_i+\theta} \boldsymbol{g_i} \in M$, por el teorema 2.3.1, parte ii), $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}$.

ii.$\Rightarrow$ i.: Se probará la condición iii) del teorema 2.3.1: Sea $\boldsymbol{f} \in M$ con $\boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$. Sea $G := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_t}\}$ como $\langle G \rangle = M$ entonces existen $f_1, \ldots, f_t \in A$ tales que $\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{g_1} + \cdots + f_t\boldsymbol{g_t}$. De los elementos que cumplen esta condición, se escoge una colección $\{f_i\}_{i=1}^{t}$ de tal manera que $\boldsymbol{X}_0 := max\{lm(lm(f_i) \mid lm(\boldsymbol{g}_i))\}_{i=1}^{t}$ sea minimal.

Sea $\boldsymbol{X}_0 := x^{\alpha_0}e_l$ para algún $l \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $lm(f_i) = x^{\alpha_i}$ y $exp(lm(\boldsymbol{g}_i)) = \beta_i$ con $1 \leq i \leq t$. Considerando el conjunto

$$F := \{\boldsymbol{g}_i \in G \mid lm(lm(f_i)lm(\boldsymbol{g}_i)) = \boldsymbol{X}_0\}$$

con $ind(lm(\boldsymbol{g}_i)) = l$ y reenumerando los elementos de G, se puede asumir que $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\}$ con $1 \leq s \leq t$, donde $\boldsymbol{X_F} \neq 0$, pues $s \geq 1$. Se presentan dos casos posibles:

Caso 1: $lm(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{X_0}$. Entonces $ind(lm(\boldsymbol{f})) = l$ y $exp(lm(\boldsymbol{f})) = \alpha_0$. Como $\alpha_0 = exp(lm(f_i)) + exp(lm(\boldsymbol{g}_i)) = \alpha_i + \beta_i$ entonces $lm(\boldsymbol{g}_i) \mid lm(\boldsymbol{f})$ y también se tiene que $lc(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{s} lc(f_i\boldsymbol{g}_i) = lc(f_1)\sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{g_1})c_{\alpha_1,\beta_1} + \cdots + lc(f_s)\sigma^{\alpha_s}(lc(\boldsymbol{g_s})c_{\alpha_s,\beta_s}$, es decir, la condición iii) del teorema 2.3.1 se cumple.

Caso 2: $\boldsymbol{X_0} \succ lm(\boldsymbol{f})$. En lo que sigue se mostrará que este caso produce una contradicción: Para todo $1 \leq i \leq s$, $\boldsymbol{X_0} = lm(lm(f_i)lm(\boldsymbol{g}_i))$, entonces $lm(\boldsymbol{g}_i) \mid \boldsymbol{X_0}$ y por lo tanto $\boldsymbol{X_F} \mid \boldsymbol{X_0}$, luego existe $\theta \in \mathbb{N}^n$ tal que $\alpha_0 = \theta + exp(\boldsymbol{X_F})$.

Por otro lado se tiene que $\gamma_i + \beta_i = exp(\boldsymbol{X_F})$ y que $\alpha_0 = \alpha_i + \beta_i$, luego $\alpha_i = \theta + \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq s$. Como $\boldsymbol{X_0} \succ lm(\boldsymbol{f})$, se cumple que $\sum_{i=1}^{s} lc(f_i\boldsymbol{g}_i) = 0$, esto es, $lc(f_1)\sigma^{\alpha_1}(lc(\boldsymbol{g_1})c_{\alpha_1,\beta_1} + \cdots + lc(f_s)\sigma^{\alpha_s}(lc(\boldsymbol{g_s})c_{\alpha_s,\beta_s} = 0$.

Sea $B_{F,\theta} = \{b_1, \ldots, b_k\} = \{(b_{11}, \ldots, b_{1s}), \ldots, (b_{k1}, \ldots, b_{ks})\}$ un conjunto de generadores de $S_{F,\theta}$. Como $(lc(f_1), \ldots, lc(f_s)) \in S_{F,\theta}$, entonces existen $r_1, \ldots, r_k \in R$ tales que

$$
\begin{aligned}
(lc(f_1), \ldots, lc(f_s)) &= r_1(b_{11}, \ldots, b_{1s}) + \cdots + r_k(b_{k1}, \ldots, b_{ks}) \\
&= (r_1b_{11} + \ldots + r_kb_{k1}, \ldots, r_1b_{1s} + \ldots + r_kb_{ks})
\end{aligned}
$$

por tanto, para $1 \leq i \leq s$, se tiene que $lc(f_i) = r_1b_{1i} + \ldots + r_kb_{ki}$ y

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= \sum_{i=1}^{t} f_i\boldsymbol{g}_i = \sum_{i=1}^{s} f_i\boldsymbol{g}_i + \sum_{i=s+1}^{t} f_i\boldsymbol{g}_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}(f_i - lc(f_i)lm(f_i) + lc(f_i)lm(f_i))\boldsymbol{g}_i + \sum_{i=s+1}^{t} f_i\boldsymbol{g}_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}[f_i - \sum_{j=1}^{k} r_jb_{ji}lm(f_i)]\boldsymbol{g}_i + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} r_jb_{ji}lm(f_i)\boldsymbol{g}_i + \sum_{i=s+1}^{t} f_i\boldsymbol{g}_i
\end{aligned}
$$

Considerando las tres partes de la suma anterior se tiene que: Para la última parte, por la definición de F y la escogencia de $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_0 \succ \{lm(lm(f_i)lm(\boldsymbol{g}_i))\}_{i=s+1}^{t}$. Para la primera parte, resulta que $\boldsymbol{X}_0 \succ lm(lm(f_i - \sum_{j=1}^{k} r_jb_{ji}lm(f_i))lm(\boldsymbol{g}_i))$ para todo $1 \leq i \leq s$. Y para la segunda parte:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} r_j b_{ji} lm(f_i)\boldsymbol{g}_i &= \sum_{j=1}^{k} r_j (\sum_{i=1}^{s} b_{ji} x^{\alpha_i}\boldsymbol{g}_i)\\ &= \sum_{j=1}^{k} r_j (\sum_{i=1}^{s} b_{ji} x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i)\end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene que $\sum_{i=1}^{s} b_{ji}x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}$ y de acuerdo con el teorema 2.2.2, existen $q_1, \ldots, q_t \in A$ tales que $\sum_{i=1}^{s} b_{ji}x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i = \sum_{i=1}^{t} q_i\boldsymbol{g}_i$ con $lm(\sum_{i=1}^{s} b_{ji}x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i) = max\{lm(lm(q_i)lm(\boldsymbol{g}_i))\}_{i=1}^{t}$.

Teniendo en cuenta que $b_{ji}x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i = b_{ji}\sigma^{\gamma_i+\theta}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\gamma_i+\theta,\beta_i}x^{\gamma_i+\theta+\beta_i=\alpha_0} + \ldots$ y que $(b_{j1}, \ldots, b_{js}) \in S_{F,\theta}$, se tiene que $\boldsymbol{X}_0 \succ lm(\sum_{i=1}^{s} b_{ji}x^{\gamma_i+\theta}\boldsymbol{g}_i)$ luego $\boldsymbol{X}_0 \succ lm(lm(q_i)lm(\boldsymbol{g}_i))$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Entonces se encontró una presentación de $\boldsymbol{f}$ que contradice la escogencia inicial de los polinomios $f_1, \ldots, f_t$, es decir, la minimalidad de $\boldsymbol{X}_0$. □

Con el teorema 2.3.2 se demostrará el siguiente resultado que se constituye en el sustento teórico del algoritmo para calcular bases de Gröbner presentado más adelante.

Teorema 2.3.3. *Sea A una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva. Sea $M \neq 0$ un submódulo de A^m y sea G un subconjunto finito de generadores no nulos de M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. G es una base de Gröbner para M.

ii. Para todo $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$, con $\boldsymbol{X_F} \neq \mathbf{0}$, y todo$(b_1, \ldots, b_s) \in B_F$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} b_i x^{\gamma_i}\boldsymbol{g_i} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}.$$

Demostración. *i.*$\Rightarrow$ *ii.*: Como $\boldsymbol{f} := \sum_{i=1}^{s} b_i x^{\gamma_i}\boldsymbol{g_i} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0} \in M$, por el teorema 2.3.1, $\boldsymbol{f} \xrightarrow{G}_+ \mathbf{0}$.

ii.$\Rightarrow$ *i.*: Se realizan dos pasos, en el Paso 1 se desarrolla un resultado preliminar, para luego abordar la prueba en el Paso 2:

Paso 1: Sea $\theta \in \mathbb{N}^n$ y $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$; se define una nueva estructura de R-módulo sobre R^s como sigue:

$$(b_1, \ldots, b_s) + (c_1, \ldots, c_s) = (b_1 + c_1, \ldots, b_s + c_s)$$

$$r * (b_1, \ldots, b_s) = \sigma^\theta(r)(b_1, \ldots, b_s) = (\sigma^\theta(r)b_1), \ldots, \sigma^\theta(r)b_s)$$

Esta nueva estructura se denota $(R^s)*$.

Sea $(S_{F,\theta})^* := \{(b_1, \ldots, b_s) \in (R^s)^* \mid \sum_{i=1}^{s} b_i\sigma^{\gamma_i+\theta}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\gamma_i+\theta,\beta_i} = 0\}$, el cual es un R-submódulo de $(R^s)^*$.

Se tiene que $(R^s)^*$ es finitamente generado, pues como A una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, σ^θ es sobre, por tanto

$$\begin{aligned}(b_1, \ldots, b_s) &= b_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + b_s\boldsymbol{e_s}\\ &= \sigma^\theta(b_1)'\boldsymbol{e_1} + \ldots + \sigma^\theta(b_s)'\boldsymbol{e_s}\\ &= b_1'\boldsymbol{e_1} + \ldots + b_s'\boldsymbol{e_s}\end{aligned}$$

También $(S_{F,\theta})^*$ es finitamente generado, pues como R es un anillo noetheriano a izquierda, y ${}_R(R^s)^*$ es finitamente generado, entonces $(R^s)^*$ es un módulo noetheriano a izquierda, por tanto $(S_{F,\theta})^*$ es un submódulo de $(R^s)^*$ y es finitamente generado. Si $\theta = 0$, entonces la estructura de R-módulo de $(R^s)^*$ es la habitual, es decir $(R^s)^* = R^s$ y por tanto $S_F^* = S_F$.

A continuación se mostrará que $(S_{F,\theta})^* \cong S_F$: La función definida por

$$\alpha : (S_{F,\theta})^* \to S_F$$

$$\boldsymbol{b} := (b_1, \ldots, b_s) \mapsto \boldsymbol{b}' := (b_1', \ldots, b_s')$$

donde $b_i' \in R$ es tal que $b_ic_{\theta,\gamma_i}^{-1} = \sigma^\theta(b_i')$ con $1 \leq i \leq s$ (pues σ^θ es sobre), es un R-isomorfismo:

a) Primero se probará que $\boldsymbol{b}' \in S_F$: Como $\boldsymbol{b} \in S^*_{F,\theta}$, $\sum_{i=1}^{s} b_i\sigma^{\gamma_i+\theta}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = 0$, y teniendo en cuenta que $b_i = \sigma^{\theta}(b_i')c_{\theta,\gamma_i}$ se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^{\theta}(b_i')c_{\theta,\gamma_i}\sigma^{\gamma_i+\theta}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = 0,$$

como $c_{\theta,\gamma_i}\sigma^{\gamma_i+\theta}(lc(\boldsymbol{g_i})) = \sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i})))c_{\theta,\gamma_i}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^{\theta}(b_i')\sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i})))c_{\theta,\gamma_i}c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = 0.$$

También se tiene que $c_{\theta,\gamma_i}c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = \sigma^{\theta}(c_{\gamma_i,\beta_i})c_{\theta,\gamma_i+\beta_i}$, luego

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^{\theta}(b_i')\sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i})))\sigma^{\theta}(c_{\gamma_i,\beta_i})c_{\theta,\gamma_i+\beta_i} = 0,$$

multiplicando la igualdad por $c^{-1}_{\theta,\boldsymbol{X}_F} = c^{-1}_{\theta,\gamma_i+\beta_i}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^{\theta}(b_i')\sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i})))\sigma^{\theta}(c_{\gamma_i,\beta_i}) = 0$$

y como σ^{θ} es inyectiva, entonces

$$\sum_{i=1}^{s} b_i'\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\gamma_i,\beta_i} = 0,$$

es decir, $\boldsymbol{b}' \in S_F$.

b) α es un homomorfismo: Sea $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_s) \in S_{F,\theta})^*$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_s) \in S_{F,\theta})^*$ donde $\alpha(\boldsymbol{b}) = (b_1', \ldots, b_s')$ con $b_ic^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^{\theta}(b_i')$ y $\alpha(\boldsymbol{c}) = (c_1', \ldots, c_s')$ con $c_ic^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^{\theta}(c_i')$. Luego $(b_i + c_i)c^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^{\theta}(b_i' + c_i')$, por tanto

$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \alpha((b_1+c_1, \ldots, b_s+c_s))\\ &= ((b_1'+c_1', \ldots, b_s'+c_s'))\\ &= \alpha(\boldsymbol{b}) + \alpha(\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

Sea $r \in R, \boldsymbol{b} \in S^*_{F,\theta}$, con $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_s)$, luego $\alpha(\boldsymbol{b}) = (b_1', \ldots, b_s')$ con $b_ic^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^{\theta}(b_i')$. Entonces $\alpha(r * \boldsymbol{b}) = \alpha((\sigma^{\theta}(r)b_1, \ldots, \sigma^{\theta}(r)b_s))$, como $\sigma^{\theta}(r)b_ic^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^{\theta}(r)\sigma^{\theta}(b_i') = \sigma^{\theta}(rb_i')$, se tiene que

$$\alpha(r * \boldsymbol{b}) = (rb'_1, \dots, rb'_s) = r\alpha(\boldsymbol{b}).$$

c) α es inyectiva: Sea $\boldsymbol{b} \in S^*_{F,\theta}$, con $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_s)$. Si se supone que $\alpha(\boldsymbol{b}) = (b'_1, \dots, b'_s) = 0$ con $b_i c^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^\theta(b'_i)$, entonces $b_i c^{-1}_{\theta,\gamma_i} = \sigma^\theta(0) = 0$, por tanto $b_i = 0$, esto es $\boldsymbol{b} = 0$.

d) α es sobreyectiva: Sea $\boldsymbol{b}' = (b'_1, \dots, b'_s) \in S_F$ entonces

$$\sum_{i=1}^{s} b'_i \sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\gamma_i,\beta_i} = 0$$

luego aplicando σ^θ, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^\theta(b'_i)\sigma^\theta(\sigma^{\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i})))\sigma^\theta(c_{\gamma_i,\beta_i}) = 0$$

ahora, multiplicando por $c_{\theta,\boldsymbol{X_F}} = c_{\theta,\gamma_i+\beta_i}$ para cada $1 \leq i \leq s$ y aplicando las igualdades 1.1 y 1.2 se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{s} \sigma^\theta(b'_i)c_{\theta,\gamma_i}\sigma^{\theta+\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = 0.$$

y haciendo $b_i = \sigma^\theta(b'_i)c_{\theta,\gamma_i}$ se tiene que $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_s) \in S^*_{F,\theta}$, luego $\alpha(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}'$.

Ahora se mostrara que si $B_{F,\theta} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$ es un sistema de generadores de $S_{F,\theta}$ entonces $B_{F,\theta}$ es también un sistema de generadores de $S^*_{F,\theta}$: Como se cumple que

$$\boldsymbol{b} := (b_1, \dots, b_s) \in S^*_{F,\theta} \text{ si y sólo si } \boldsymbol{b} \in S_{F,\theta}$$

pues $\sum_{i=1}^{s} b_i \sigma^{\theta+\gamma_i}(lc(\boldsymbol{g_i}))c_{\theta+\gamma_i,\beta_i} = 0$, y σ^θ es sobre, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} &= r_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + r_k\boldsymbol{b}_k\\ &= \sigma^\theta(r'_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \sigma^\theta(r'_k)\boldsymbol{b}_k\\ &= (r'_1) * \boldsymbol{b}_1 + \ldots + (r'_k) * \boldsymbol{b}_k.\end{aligned}$$

Se probó que si A es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, $\theta \in \mathbb{N}^n$, $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$ y $B_{F,\theta}$ es un sistema de generadores de $S_{F,\theta}$ entonces $\alpha(B_{F,\theta})$ es un sistema de generadores de S_F, pues $S^*_{F,\theta} \cong S_F$.

Paso 2: Ahora se prueba que *ii.* $\Rightarrow$ *i.* para extensiones $\sigma - PBW$ cuasi conmutativas biyectivas. Para esto se prueba la condición ii) del teorema 2.3.2.

Sea $F := \{\boldsymbol{g_1}, \ldots, \boldsymbol{g_s}\} \subseteq G$ con $\boldsymbol{X}_F \neq 0$. Si $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_s) \in B_{F,\theta}$ entonces $\alpha(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b'} = (b'_1, \ldots, b'_s) \in B_F$, por hipótesis se tiene que

$$\sum_{i=1}^{s} b'_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}.$$

Como A es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, entonces los $c_{\alpha,\beta}$ son invertibles para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, luego se puede aplicar el teorema 2.2.1, esto es, existe $\boldsymbol{p} \in A^m$ con $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ o $lm(x^\theta \boldsymbol{f}) \succ lm(\boldsymbol{p})$ tal que

$$x^\theta \sum_{i=1}^{s} b'_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i} + \boldsymbol{p} \xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}$$

con $\boldsymbol{f} := \sum_{i=1}^{s} b'_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i}$, pero como A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, entonces $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, luego

$$\begin{aligned}
x^\theta \sum_{i=1}^{s} b'_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i} &\xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0} \\
\sum_{i=1}^{s} x^\theta b'_i x^{\gamma_i} \boldsymbol{g_i} &\xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0} \\
\sum_{i=1}^{s} \sigma^\theta(b'_i) c_{\theta,\gamma_i} x^{\theta+\gamma_i} \boldsymbol{g_i} &\xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0} \\
\sum_{i=1}^{s} b_i x^{\theta+\gamma_i} \boldsymbol{g_i} &\xrightarrow{G}_+ \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.2. *Sean A una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva y $F := \{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s}\}$ un conjunto de vectores no nulos de A^m. El algoritmo siguiente produce una base de Gröbner para el submódulo $M = \langle \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s} \rangle$, donde $\mathcal{P}(X)$ denota al conjunto de los subconjuntos de un conjunto X:*

Algoritmo de Bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\boldsymbol{\sigma - PBW}$ cuasi-conmutativas biyectivas

ENTRADA: $F = \{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_s}\} \subseteq A^m$ con $\boldsymbol{f_i} \neq \boldsymbol{0}$, $1 \leq i \leq s$.

SALIDA: $G = \{\boldsymbol{g_1}, \dots, \boldsymbol{g_t}\}$ una base de Gröbner para $\langle F \rangle$.

INICIO: $G := \emptyset$, $G' := F$.

MIENTRAS $G' \neq G$ **HACER**

$D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$

$G := G'$

PARA cada $S := \{\boldsymbol{g_{i1}}, \dots, \boldsymbol{g_{ik}}\} \in D$ tal que $\boldsymbol{X_S} \neq \boldsymbol{0}$

HACER

Calcular B_S

PARA cada $\boldsymbol{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B_S$ **HACER**

Reducir $\sum_{j=1}^{k} b_j x^{\gamma_j} \boldsymbol{g_{ij}} \xrightarrow{G'}_+ \boldsymbol{r}$ con $\boldsymbol{r}$ reducido

con respecto a G' y $\gamma_j + exp(lm(\boldsymbol{g_{ij}})) = exp(\boldsymbol{X_S})$.

SI $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ **ENTONCES**

$G' := G' \cup \{r\}$

Es de resaltar que el algoritmo se detiene pues del proceso se tiene que $F \subseteq G' \subseteq G'' \subseteq \dots$, luego $\langle F \rangle \subseteq \langle G' \rangle \subseteq \dots$ y como A^m es un módulo noetheriano, esta cadena de submódulos se detiene.

Como R es noetheriano a izquierda, por el teorema 1.2.3, A es noetheriano a izquierda y como el A-módulo A^m es finitamente generado, se tiene que A^m es noetheriano y por tanto cada submódulo de A^m es finitamente generado. De este hecho y del algoritmo presentado anteriormente, se infiere el siguiente resultado:

Corolario 2.3.3. *Sea A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva, entonces cada submódulo de A^m tiene una base de Gröbner.*

Unos ejemplos de aplicación del algoritmo presentado en el corolario 2.3.2 son los siguientes:

Ejemplo 2.3.1. En el análogo multiplicativo del álgebra de Weyl

$$O_3(\lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{32}) = O_3\left(2, \frac{1}{2}, 3\right) = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3\rangle = A$$

teniendo en cuenta que satisface las siguientes relaciones

$$x_2x_1 = \lambda_{21}x_1x_2 = 2x_1x_2 \text{ luego } \sigma_2(x_1) = 2x_1 \text{ y } \delta_2(x_1) = 0$$

$$x_3x_1 = \lambda_{31}x_1x_3 = \frac{1}{2}x_1x_3 \text{ luego } \sigma_3(x_1) = \frac{1}{2}x_1 \text{ y } \delta_3(x_1) = 0$$

$$x_3x_2 = \lambda_{32}x_2x_3 = 3x_2x_3 \text{ luego } c_{2,3} = 3.$$

y para $r \in \mathbb{Q}$,

$$x_2r = rx_2 \text{ luego } \sigma_2(r) = r$$

$$x_3r = rx_3 \text{ luego } \sigma_3(r) = r,$$

se considerará en $Mon(A)$ el orden deglex, por tanto $x_2 > x_3$ y en $Mon(A^2)$ el orden TOPREV, luego $\boldsymbol{e_1} \succ \boldsymbol{e_2}$.

Sean $\boldsymbol{f_1} = x_1^2x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{f_1}) = x_2^2\boldsymbol{e_1}$ y $\boldsymbol{f_2} = 2x_1x_2x_3\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{f_2}) = x_2x_3\boldsymbol{e_1}$. Se construirá una base de Gröbner para el módulo $M := \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\rangle$:

Paso 1: Se inicia con $G := \emptyset$, $G' := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$. Como $G' \neq G$, se hace
$D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_1, S_2, S_{1,2}\}$, donde $S_1 := \{\boldsymbol{f_1}\}, S_2 := \{\boldsymbol{f_2}\}, S_{1,2} := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, se halla B_S:

- Para S_1 se halla B_{S_1}, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1})) = (2, 0)$; $\boldsymbol{X_{S_1}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{f_1})\} = lm(\boldsymbol{f_1}) = x_2^2\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) = (2, 0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) - \beta_1 = (0, 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_2^2$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$. Entonces

$$\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = \sigma^{\gamma_1}(x_1^2)1 = \sigma_2^0\sigma_3^0(x_1^2) = x_1^2.$$

Luego $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[x_1^2] = \{0\}$ y $B_{S_1} = \{0\}$. Por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para S_2, $B_{S_2} = \{0\}$, luego tampoco se adiciona un nuevo vector a G'.
- Para $S_{1,2}$ se halla $B_{S_{1,2}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1})) = (2,0)$ y $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{f_2})) = (1,1)$; $\boldsymbol{X_{S_{1,2}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{f_1}), lm(\boldsymbol{f_2})\} = m.c.m.(x_2^2\boldsymbol{e_1}, x_2x_3\boldsymbol{e_1}) = x_2^2x_3\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) = (2,1)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_1 = (0,\ 1)$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_2 = (1,\ 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_3x_2^2 = 3x_2x_3x_2 = 9x_2^2x_3$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 9$, también tenemos $x^{\gamma_2}x^{\beta_2} = x_2^2x_3$, luego $c_{\gamma_2,\beta_2} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} &= \sigma^{\gamma_1}(x_1^2)9 = \sigma_2^0\sigma_3(x_1^2)9\\ &= \sigma_2^0(\sigma_3(x_1)\sigma_3(x_1))9\\ &= \sigma_2^0(\frac{1}{4}x_1^2)9 = \frac{9}{4}x_1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} &= \sigma^{\gamma_2}(2x_1)1 = \sigma_2\sigma_3^0(2x_1)\\ &= \sigma_2(2x_1) = 4x_1\end{aligned}$$

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\frac{9}{4}x_1^2 \quad 4x_1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(\frac{9}{4}x_1^2) + b_2(4x_1) = 0\}$ y $B_{S_{1,2}} = \{(4, -\frac{9}{4}x_1)\}$. Ahora para $(4, -\frac{9}{4}x_1) \in B_{S_{1,2}}$ se hace:

$$\begin{aligned}4x^{\gamma_1}\boldsymbol{f_1} - \frac{9}{4}x_1x^{\gamma_2}\boldsymbol{f_2} &= 4x_3(x_1^2x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}) - \frac{9}{4}x_1x_2(2x_1x_2x_3\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2})\\ &= 4x_3x_1^2x_2^2\boldsymbol{e_1} + 4x_3x_2x_3\boldsymbol{e_2} - \frac{9}{4}x_1x_22x_1x_2x_3\boldsymbol{e_1} - \frac{9}{4}x_1x_2^2\boldsymbol{e_2}\\ &= 9x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e_1} + 12x_2x_3^2\boldsymbol{e_2} - 9x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e_1} - \frac{9}{4}x_1x_2^2\boldsymbol{e_2}\\ &= 12x_2x_3^2\boldsymbol{e_2} - \frac{9}{4}x_1x_2^2\boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{f_3}\end{aligned}$$

con $lm(\boldsymbol{f_3}) = x_2x_3^2\boldsymbol{e_2}$. Se observa que $\boldsymbol{f_3}$ no es reducible con respecto a G', es decir, $\boldsymbol{f_3}$ es reducido, entonces se hace $G' = G' \cup \{\boldsymbol{f_3}\}$, es decir, $G' = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$.

Paso 2: Como $G = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\} \neq G' = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$, se hace
$D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_3, S_{1,3}, S_{2,3}, S_{1,2,3}\}$, donde $S_1 := \{\boldsymbol{f_1}\}, S_{1,3} := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_3}\}, S_{2,3} := \{\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}, S_{1,2,3} := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, se halla B_S: Como $\boldsymbol{X_{S_{1,3}}} = \boldsymbol{X_{S_{2,3}}} = \boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}} = 0$, entonces sólo se trabaja con S_3.

- Para S_3 se halla B_{S_3}, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{f_3}))c_{\gamma_3,\beta_3}],$$

con $\beta_3 = \exp(lm(\boldsymbol{f_3})) = (1,2)$; $\boldsymbol{X_{S_3}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{f_3})\} = lm(\boldsymbol{f_3}) = x_2x_3^2\boldsymbol{e_2}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_3}}) = (1,2)$; $\gamma_3 = \exp(\boldsymbol{X_{S_3}}) - \beta_3 = (0,0)$; $x^{\gamma_3}x^{\beta_3} = x_2x_3^2$, luego $c_{\gamma_3,\beta_3} = 1$. Entonces

$$\sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{f_3}))c_{\gamma_3,\beta_3} = \sigma^{\gamma_3}(12)1 = \sigma_2^0\sigma_3^0(12) = 12$$

Luego $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[12] = \{0\}$ y $B_{S_3} = \{0\}$. Por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'. Entonces $G = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$ es una base de Gröbner para M.

Ejemplo 2.3.2. En el análogo multiplicativo del álgebra de Weyl

$$O_3(\lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{32}) = O_3\left(2, \frac{1}{2}, 3\right) = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3\rangle = A$$

teniendo en cuenta las mismas relaciones mencionadas anteriormente, se considerará en $Mon(A)$ el orden deglex, por tanto $x_2 > x_3$ y en $Mon(A^2)$ el orden TOPREV, luego $\boldsymbol{e_1} \succ \boldsymbol{e_2}$.

Sean $\boldsymbol{f_1} = (2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{f_1}) = x_2^2\boldsymbol{e_1}$ y $\boldsymbol{f_2} = (4x_1^2+x_1)x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{f_2}) = x_2^3\boldsymbol{e_1}$. Se construirá una base de Gröbner para el módulo $M := \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\rangle$:

Paso 1: Se inicia con $G := \emptyset$, $G' := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$. Como $G' \neq G$, se hace $D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_1, S_2, S_{1,2}\}$, donde $S_1 := \{\boldsymbol{f_1}\}, S_2 := \{\boldsymbol{f_2}\}, S_{1,2} := \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, se halla B_S:

- Para S_1 se halla B_{S_1}, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1})) = (2,0)$; $\boldsymbol{X_{S_1}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{f_1})\} = lm(\boldsymbol{f_1}) = x_2^2\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) = (2,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) - \beta_1 = (0,0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_2^2$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$. Entonces

$$\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = \sigma^{\gamma_1}(2x_1+1)1 = \sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1+1) = 2x_1+1.$$

Luego $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[2x_1+1] = \{0\}$ y $B_{S_1} = \{0\}$. Por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para S_2, $B_{S_2} = \{0\}$, entonces tampoco se adiciona un nuevo vector a G'.
- Para $S_{1,2}$ hallamos $B_{S_{1,2}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1})) = (2,0)$ y $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{f_2})) = (3,0)$; además,

$$\boldsymbol{X_{S_{1,2}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{f_1}), lm(\boldsymbol{f_2})\} = m.c.m.(x_2^2\boldsymbol{e_1}, x_2^3\boldsymbol{e_1}) = x_2^3\boldsymbol{e_1},$$

por tanto, $\exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) = (3,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_1 = (1,0)$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_2 = (0,0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_2x_2^2 = x_2^3$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$, también se tiene $x^{\gamma_2}x^{\beta_2} = x_2^3$, luego $c_{\gamma_2,\beta_2} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} &= \sigma^{\gamma_1}(2x_1+1)1 = \sigma_2\sigma_3^0(2x_1+1)\\ &= \sigma_2(2x_1+1) = 2\sigma_2(x_1)+1 = 4x_1+1\end{aligned}$$

$$\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} = \sigma^{\gamma_2}(4x_1^2+x_1)1 = \sigma_2^0\sigma_3^0(4x_1^2+x_1) = 4x_1^2+x_1$$

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[4x_1+1 \quad 4x_1^2+x_1] = \{(b_1,b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(4x_1+1)+b_2(4x_1^2+x_1) = 0\}$ y $B_{S_{1,2}} = \{(x_1,-1)\}$. Ahora para $(x_1,-1) \in B_{S_{1,2}}$ se hace:

$$\begin{aligned}x_1x^{\gamma_1}\boldsymbol{f_1} - 1x^{\gamma_2}\boldsymbol{f_2} &= x_1x_2((2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}) - ((4x_1^2+x_1)x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2})\\ &= x_1x_2(2x_1x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}) - (4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2})\\ &= 4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2} - 4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e_1} - x_1x_2^3\boldsymbol{e_1} - x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2}\\ &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

Por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'. Entonces $G = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$ es una base de Gröbner para M.

CAPÍTULO 3

Algunas aplicaciones de las bases de Gröbner para módulos sobre extensiones $\sigma - PBW$

En este capítulo se presentarán algunas aplicaciones básicas de las bases de Gröbner en teoría de módulos, como el cálculo de sicigias, la presentación de un A-módulo, el núcleo y la imagen de un homomorfismo, recordando que $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ es una extensión $\sigma - PBW$ del anillo R, con R un anillo GSI.

3.1. Sicigia de un módulo

En esta sección se presentará un método matricial para el cálculo de las sicigias de un submódulo $M = \langle \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s}\rangle$ del A-módulo libre izquierdo A^m, usando bases de Gröbner, donde $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ es una extensión $\sigma - PBW$ cuasiconmutativa biyectiva, con R un anillo GSI.

Dados dos A-módulos libres izquierdos A^s y A^m donde A una extensión $\sigma - PBW$ cualquiera, con bases canónicas $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_s}\}$ y $\{\tilde{\boldsymbol{e_1}}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e_m}}\}$ respectivamente; todo homomorfismo f entre ellos está determinado por la asignación realizada a sus generadores, esto es

$$f : A^s \to A^m$$

está definido por $f(\boldsymbol{e_j}) = \boldsymbol{f_j}$ con $1 \leq j \leq s$, donde $\boldsymbol{f_j} = f_{1j}\tilde{\boldsymbol{e_1}} + \cdots + f_{mj}\tilde{\boldsymbol{e_m}} \in A^m$, con $f_{ij} \in A$, $1 \leq i \leq m$. La linealidad de las bases de A^s y A^m, implica que dado

$\boldsymbol{a} := (a_1, \ldots, a_s)^T \in A^s$, $f(\boldsymbol{a}) = f(\sum_{j=1}^{s} a_j \boldsymbol{e_j}) = \sum_{j=1}^{s} a_j \boldsymbol{f_j} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{s} a_j f_{ij} \right) \tilde{\boldsymbol{e_i}}$. Por tanto, f puede ser representado por una matriz, es decir, la matriz de representación del homomorfismo f en las bases canónicas de A^s y A^m es

$$F := \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_1} & \cdots & \boldsymbol{f_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{ms} \end{bmatrix} \in M_{m \times s}(A).$$

Es de notar que a diferencia de lo que sucede en el caso conmutativo, si $\boldsymbol{a} := (a_1, \ldots, a_s)^T \in A^s$, entonces $f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}^T F^T)^T$, pues:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) &= f(a_1 \boldsymbol{e_1} + \cdots + a_s \boldsymbol{e_s}) \\ &= a_1 f(\boldsymbol{e_1}) + \cdots + a_s f(\boldsymbol{e_s}) \\ &= a_1 \begin{bmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + a_s \begin{bmatrix} f_{1s} \\ \vdots \\ f_{ms} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 f_{11} + \cdots + a_s f_{1s} \\ \vdots \\ a_1 f_{m1} + \cdots + a_s f_{ms} \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1s} & \cdots & f_{ms} \end{bmatrix} \right)^T \\ &= (\boldsymbol{a}^T F^T)^T. \end{aligned}$$

También se tiene que $Im(f)$ es el módulo columna de F, esto es, el A-módulo izquierdo generado por las columnas de F:

$$Im(f) = \langle f(\boldsymbol{e_1}), \ldots, f(\boldsymbol{e_s}) \rangle = \langle \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s} \rangle = \langle F \rangle.$$

Definición 3.1.1. *$Syz(\{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s}\})$ es un submódulo de A^s que consiste de los vectores $\boldsymbol{a} := (a_1, \ldots, a_s)^T$ tales que*

$$a_1 \boldsymbol{f_1} + \cdots + a_s \boldsymbol{f_s} = 0.$$

De acuerdo con la definición anterior, se tiene que $Syz(\{\boldsymbol{f_1},\dots,\boldsymbol{f_s}\}) = ker(f)$, sin embargo, $Syz(\{\boldsymbol{f_1},\dots,\boldsymbol{f_s}\}) \neq ker(F)$, puesto que

$$\boldsymbol{a} \in Syz(\{\boldsymbol{f_1},\dots,\boldsymbol{f_s}\}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}^T F^T)^T = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^T F^T = 0.$$

Definición 3.1.2. *El módulo de sicigias de M y F es*

$$Syz(M) := Syz(F) := Syz(\{\boldsymbol{f_1},\dots,\boldsymbol{f_s}\}).$$

Si $Syz(F)$ es generado por r vectores $\boldsymbol{z_1},\dots,\boldsymbol{z_r}$, esto es $Syz(F) = \langle \boldsymbol{z_1},\dots,\boldsymbol{z_r}\rangle$, tales generadores se pueden disponer en una matriz, como se muestra a continuación

$$Syz(F) := Z(F) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_1} & \cdots & \boldsymbol{z_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{s1} & \cdots & z_{sr} \end{bmatrix} \in M_{s\times r}(A).$$

Por tal razón en algunas ocasiones se hará referencia a $Syz(F)$ como una matriz. También se tiene que como $\boldsymbol{z_i} \in Syz(F)$, entonces $\boldsymbol{z_i}^T F^T = 0$, por tanto $Z(F)^T F^T = 0$.

Para calcular $Syz(F)$ se determinará en forma explícita el módulo sicigia de la matriz cuyas columnas son los vectores que conforman una base de Gröbner para M, y a su vez, estas sicigias pueden ser obtenidas utilizando el cálculo del módulo sicigia de la matriz cuyas columnas son los términos principales de los vectores que conforman dicha base de Gröbner; como el propósito es determinar efectivamente $Syz(F)$, y el algoritmo desarrollado en el capítulo anterior para encontrar bases de Gröbner de un submódulo de A^m es sólo para extensiones $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativas biyectivas, en esta sección también se requiere esta condición, sin embargo se presentarán de manera más general algunos teoremas que en su formulación no requieren de esas dos condiciones.

Atendiendo a este plan, se iniciará definiendo sicigias homogéneas, pues esta noción juega un papel importante en la búsqueda de un conjunto de generadores para el módulo sicigia de la matriz cuyas columnas son los términos principales de los vectores que conforman una base de Gröbner para M. Por tanto, sea $L = \begin{bmatrix} c_1\boldsymbol{X_1} & \cdots & c_t\boldsymbol{X_t} \end{bmatrix} \in M_{m\times t}(A)$, donde $\boldsymbol{X_1} = X_1\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{X_t} = X_t\boldsymbol{e}_{i_t}$ son monomios de A^m, $c_1,\dots,c_t \in R-\{0\}$ y $1 \leq i_1,\dots,i_t \leq m$.

Definición 3.1.3. *Una sicigia* $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_t)^T \in Syz(L)$ *es homogénea de grado* $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$*, donde* $X \in Mon(A)$ *y* $1 \leq i \leq m$*, si*

i) h_j *es un término para cada* $1 \leq j \leq t$.

ii) Para cada $1 \leq j \leq t$, $h_j = 0$ *ó si* $h_j \neq 0$ *entonces* $lm(lm(h_j)\boldsymbol{X_j}) = \boldsymbol{X}$.

Teorema 3.1.1. *Sean* A *una extension* $\sigma - PBW$ *cuasi-conmutativa y la matriz* $L = \begin{bmatrix} c_1\boldsymbol{X_1} & \cdots & c_t\boldsymbol{X_t} \end{bmatrix} \in M_{m\times t}(A)$*. Entonces* $Syz(L)$ *tiene un conjunto finito de sicigias homogéneas que lo generan.*

Demostración: Como A^t es un módulo noetheriano, entonces $Syz(L)$ es un submódulo finitamente generado de A^t, por tanto es suficiente probar que cada uno de sus generadores es una suma finita de sicigias homogéneas de $Syz(L)$. Si $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_t)^T$ es un generador de $Syz(L)$, se tiene que $h_1c_1X_1\boldsymbol{e_{i_1}} + \cdots + h_tc_tX_t\boldsymbol{e_{i_t}} = \boldsymbol{0}$, luego se pueden agrupar los sumandos de acuerdo con los vectores canónicos iguales, por ejemplo, si $i_1 = i_2$, resulta que $(h_1c_1X_1 + h_2c_2X_2)\boldsymbol{e_{i_1}} = \boldsymbol{0}$, luego el problema se reduce a escribir $(h_1, h_2)^T$ como suma de sicigias homogéneas de $Syz(c_1\boldsymbol{X_1}, c_2\boldsymbol{X_2})$; esto mismo se realiza para las otras entradas $i_j, 1 \leq j \leq t$ que sean iguales.

Teniendo este problema resuelto, se puede escribir $\boldsymbol{h}$ como suma de las sicigias encontradas para cada entrada que resulta de agrupar según los vectores canónicos iguales; colocando entradas nulas en las posiciones diferentes al vector canónico de su grupo. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que todos los vectores canónicos son iguales, esto es $(h_1c_1X_1 + \cdots + h_tc_tX_t)\boldsymbol{e_{i_1}} = \boldsymbol{0}$, entonces se mostrará que si $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_t)^T \in Syz(L)$, $\boldsymbol{f}$ puede expresarse como una suma finita de sicigias homogéneas de $Syz(L)$. De acuerdo con los supuestos enunciados

$$f_1c_1X_1 + \cdots + f_tc_tX_t = 0.$$

Cada f_j con $1 \leq j \leq t$ se puede expresar como una suma de u términos, adicionando sumandos ceros si es necesario:

$$f_j = a_{1j}Y_1 + \cdots + a_{uj}Y_u$$

donde $a_{lj} \in R$ y $Y_1 \succ Y_2 \succ \ldots \succ Y_u \in Mon(A)$ son los diferentes monomios que se encuentran en $f_1, \ldots, f_t$ con $1 \leq j \leq t$, $1 \leq l \leq u$. Entonces,

$$(a_{11}Y_1 + \cdots + a_{u1}Y_u)c_1X_1 + \cdots + (a_{1t}Y_1 + \cdots + a_{ut}Y_u)c_tX_t = 0. \tag{3.1}$$

Como A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, el producto de términos es un término, por tanto en la igualdad (3.1), de los tu términos que resultan, se va a suponer que hay d diferentes, los cuales son $Z_1, \ldots, Z_d$, luego

$$k_1Z_1 + \cdots + k_dZ_d = 0,$$

con $k_i \in R$, lo que implica que $k_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq d$.

En (3.1) podemos asumir que en cada sumando existe $b_{lj}Y_{lj}$ tal que $lm(Y_{lj}X_j) = Z_l$ con $1 \leq l \leq d$ y $1 \leq j \leq t$, asumiendo que este término es cero si es necesario, luego

$$b_{l1}Y_{l1}c_1X_1 + \cdots + b_{lt}Y_{lt}c_tX_t = k_lZ_l = 0$$

lo que nos indica que $(b_{l1}Y_{l1}, \ldots, b_{lt}Y_{lt})^T$ es una sicigia homogénea de $Syz(L)$ de grado Z_l, entonces

$$(b_{11}Y_{11}c_1X_1 + \cdots + b_{1t}Y_{1t}c_tX_t) + \cdots + (b_{d1}Y_{d1}c_1X_1 + \cdots + b_{dt}Y_{dt}c_tX_t) = 0$$

esto es,

$$(b_{11}Y_{11} + \cdots + b_{d1}Y_{d1})c_1X_1 + \cdots + (b_{1t}Y_{1t} + \cdots + b_{dt}Y_{dt})c_tX_t = 0$$

como $f_1c_1X_1 + \cdots + f_tc_tX_t = 0$, para $1 \leq i \leq t$ se tiene que

$$f_ic_i = (b_{1i}Y_{1i} + \cdots + b_{di}Y_{di})c_i$$

y teniendo en cuenta que los Y_l con $1 \leq l \leq u$ son difrentes y están ordenados,

$$f_i = b_{1i}Y_{1i} + \cdots + b_{di}Y_{di}$$

es decir, $\boldsymbol{f}$ es una suma finita de sicigias homogéneas de $Syz(L)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= (f_1, \ldots, f_t)^T \\
&= (b_{11}Y_{11} + \cdots + b_{d1}Y_{d1}, \ldots, b_{1t}Y_{1t} + \cdots + b_{dt}Y_{dt})^T \\
&= (b_{11}Y_{11}, \ldots, b_{1t}Y_{1t})^T + \cdots + (b_{d1}Y_{d1}, \ldots, b_{dt}Y_{dt})^T.
\end{aligned}$$ □

Definición 3.1.4. *Sean $\boldsymbol{X_1} \ldots \boldsymbol{X_t} \in Mon(A^m)$, $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$ y $\boldsymbol{X_J} = mcm\{\boldsymbol{X_j} \mid j \in J\}$. Se dice que J es saturado con respecto a $\{\boldsymbol{X_1} \ldots \boldsymbol{X_t}\}$ si para todo $j \in \{1, \ldots, t\}$ se cumple que*

$$Si\ \boldsymbol{X_j} \mid \boldsymbol{X_J}\ entonces\ j \in J.$$

La saturación J' de J consiste de todos los $j \in \{1, \ldots, t\}$ tales que $\boldsymbol{X_j} \mid \boldsymbol{X_J}$.

Teorema 3.1.2. *Sean A una extension $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva y $L = \begin{bmatrix} c_1\boldsymbol{X_1} & \cdots & c_t\boldsymbol{X_t} \end{bmatrix} \in M_{m\times t}(A)$. Entonces un conjunto de generadores homogéneos para Syz(L) es*

$$W = \{\boldsymbol{s_v^J} \mid J \subseteq \{1, \ldots, t\}\ es\ saturado\ con\ respecto\ a\ \{\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_t}\}, 1 \leq v \leq r_J\}$$

donde

$$\boldsymbol{s_v^J} = \sum_{j\in J} b_{vj}^J x^{\gamma_j}\boldsymbol{e_j}$$

con $\boldsymbol{X_J} = lm(x^{\gamma_j}\boldsymbol{X_j})$ para todo $j \in J$, si $\boldsymbol{X_j} = x^{\beta_j}\boldsymbol{e_{i_j}}$, se tiene que $\boldsymbol{X_J} = lm(x^{\gamma_j}x^{\beta_j}\boldsymbol{e_{i_j}})$ y $B^J = \{\boldsymbol{b_1^J}, \ldots, \boldsymbol{b_{r_j}^J}\}$ con $\boldsymbol{b_v^J} = (b_{vj}^J)_{j\in J}$, $1 \leq v \leq r_J$, es un sistema de generadores de $Syz_R[\sigma^{\gamma_j}(c_j)c_{\gamma_j,\beta_j} \mid j \in J]$.

Demostración: Cada vector $\boldsymbol{s_v^J}$ es una sicigia homogénea de $Syz(L)$ de grado $\boldsymbol{X_J}$, pues cada entrada de $\boldsymbol{s_v^J}$ es un término; para cada entrada no nula de $\boldsymbol{s_v^J}$, esto es para las $j \in J$, se tiene que $lm(x^{\gamma_j}\boldsymbol{X_j}) = \boldsymbol{X_J}$ y

$$\begin{aligned}
((\boldsymbol{s_v^J})^T L^T)^T &= \sum_{j\in J} b_{vj}^J x^{\gamma_j} c_j \boldsymbol{X_j} \\
&= \sum_{j\in J} b_{vj}^J \sigma^{\gamma_j}(c_j) x^{\gamma_j} \boldsymbol{X_j} \\
&= \sum_{j\in J} b_{vj}^J \sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j} x^{\gamma_j+\beta_j} \boldsymbol{e_{i_j}}.
\end{aligned}$$

puesto que A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, además como los i_j tales que $j \in J$ son iguales entre si, pues $\boldsymbol{X_J} = lm(x^{\gamma_j} x^{\beta_j} \boldsymbol{e_{i_j}})$, se tiene que

$$((\boldsymbol{s_v^J})^T L^T)^T = \sum_{j \in J} b_{vj}^J \sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j} \boldsymbol{X_J}$$

luego, $((\boldsymbol{s_v^J})^T L^T)^T = \boldsymbol{0}$, pues $\boldsymbol{b_v^J} = (b_{vj}^J)_{j \in J} \in Syz_R[\sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j} \mid j \in J]$. Por tanto se puede concluir que $\langle W \rangle \subseteq Syz(L)$.

Por otro lado, sea $\boldsymbol{h} \in Syz(L)$, como por el teorema 3.1.1 $Syz(L)$ es generada por un conjunto de sicigias homogéneas, se puede asumir que $\boldsymbol{h}$ es una sicigia homogénea de algún grado $\boldsymbol{Y} = Y\boldsymbol{e_i}$, con $Y = x^\alpha$. La idea ahora es presentar $\boldsymbol{h}$ como una combinación lineal de sicigias de tipo $\boldsymbol{s_v^J}$, esto es, mostrar que $Syz(L) \subseteq \langle W \rangle$:

Sean $\boldsymbol{h} = (d_1 Y_1, \ldots, d_t Y_t)^T$ con $d_k \in R$ y $Y_k \in Mon(A)$ tal que $Y_k = x^{\alpha_k}$ para $1 \leq k \leq t$ y $J = \{j \in \{1, \ldots, t\} \mid d_j \neq 0\}$ con J' su saturación con respecto a $\{\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_t}\}$. Como $\boldsymbol{h} \in Syz(L)$ y es homogénea de grado $\boldsymbol{Y}$, se cumple que para todo $j \in J$, $lm(Y_j \boldsymbol{X_j}) = \boldsymbol{Y}$ y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} = \sum_{j \in J} d_j Y_j c_j \boldsymbol{X_j} &= \sum_{j \in J} d_j \sigma^{\alpha_j}(c_j) Y_j \boldsymbol{X_j} \\
&= \sum_{j \in J} d_j \sigma^{\alpha_j}(c_j) c_{\alpha_j,\beta_j} \boldsymbol{Y}.
\end{aligned}$$

También se tiene que como $lm(Y_j \boldsymbol{X_j}) = \boldsymbol{Y}$ implica que $\boldsymbol{X_j} \mid \boldsymbol{Y}$ para todo $j \in J$, entonces $\boldsymbol{X_J} \mid \boldsymbol{Y}$, por tanto existe θ tal que $lm(x^\theta X_J) = Y = x^\alpha$, es decir, $\theta + exp(\boldsymbol{X_J}) = \alpha$ donde $exp(\boldsymbol{X_J}) = \gamma_j + \beta_j$ para $j \in J$; por otro lado, $\alpha_j + \beta_j = \alpha$ para $j \in J$, pues $lm(Y_j \boldsymbol{X_j}) = \boldsymbol{Y}$, por tanto $\alpha_j = \theta + \gamma_j$.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= \sum_{j \in J} d_j \sigma^{\alpha_j}(c_j) c_{\alpha_j,\beta_j} \boldsymbol{Y} \\
&= \sum_{j \in J} d_j \sigma^{\theta+\gamma_j}(c_j) c_{\theta+\gamma_j,\beta_j} \boldsymbol{Y}
\end{aligned}$$

entonces, teniendo en cuenta las igualdades (1.1) y (1.2),

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j\in J} d_j \sigma^{\theta+\gamma_j}(c_j) c_{\theta+\gamma_j,\beta_j}\\
&= \sum_{j\in J} d_j c^{-1}_{\theta,\gamma_j} c_{\theta,\gamma_j} \sigma^{\theta+\gamma_j}(c_j) c_{\theta+\gamma_j,\beta_j}\\
&= \sum_{j\in J} d_j c^{-1}_{\theta,\gamma_j} \sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_j}(c_j)) c_{\theta,\gamma_j} c_{\theta+\gamma_j,\beta_j}\\
&= \sum_{j\in J} d_j c^{-1}_{\theta,\gamma_j} \sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_j}(c_j)) \sigma^{\theta}(c_{\gamma_j,\beta_j}) c_{\theta,\gamma_j+\beta_j}
\end{aligned}
$$

la igualdad se multiplica por $c^{-1}_{\theta,exp(\boldsymbol{X_J})} = c^{-1}_{\theta,\gamma_j+\beta_j}$ para $j \in J$, por tanto

$$0 = \sum_{j\in J} d_j c^{-1}_{\theta,\gamma_j} \sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j})$$

como σ^θ es sobre ya que A es una extensión $\sigma - PBW$ biyectiva, existe d'_j tal que $\sigma^\theta(d'_j) = d_j c^{-1}_{\theta,\gamma_j}$, luego

$$0 = \sum_{j\in J} \sigma^{\theta}(d'_j) \sigma^{\theta}(\sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j})$$

y finalmente se obtiene que

$$0 = \sum_{j\in J} d'_j \sigma^{\gamma_j}(c_j) c_{\gamma_j,\beta_j}$$

pues σ^θ es inyectiva.

De igualdad anterior se desprende que $(d'_j \mid j \in J')$ es una sicigia de $Syz_R[\sigma^{\gamma_j}(c_j)c_{\gamma_j,\beta_j} \mid j \in J']$, debido a que $J \subseteq J'$ y si $j \in J' - J$ entonces $d_j = 0$ y en consecuencia $d'_j = 0$; por tanto

$$(d'_j \mid j \in J') = \sum_{v=1}^{r'_J} a_v b^{J'}_{vj}.$$

Como $\boldsymbol{X'_J} = \boldsymbol{X_J}$ entonces $\boldsymbol{X'_J}$ divide a $\boldsymbol{Y}$, luego

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &= \sum_{j=1}^{t} d_j Y_j \boldsymbol{e_j} = \sum_{j\in J'} d_j c_{\theta,\gamma_j}^{-1} x^{\theta} x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} = \sum_{j\in J'} \sigma^{\theta}(d'_j) x^{\theta} x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} \\
&= \sum_{j\in J'} x^{\theta} d'_j x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} = \sum_{j\in J'} x^{\theta} \left(\sum_{v=1}^{r_{J'}} a_v b_{vj}^{J'} \right) x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} = \sum_{j\in J'} \sum_{v=1}^{r_{J'}} x^{\theta} a_v b_{vj}^{J'} x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} \\
&= \sum_{v=1}^{r_{J'}} x^{\theta} a_v \sum_{j\in J'} b_{vj}^{J'} x^{\gamma_j} \boldsymbol{e_j} = \sum_{v=1}^{r_{J'}} \sigma^{\theta}(a_v) x^{\theta} \boldsymbol{s_v^{J'}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Sea A una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva y sea $G := \{\boldsymbol{g_1}, \cdots, \boldsymbol{g_t}\}$ una base de Gröbner para el submódulo $M = \langle \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_s} \rangle$ de A^m, que puede ser vista como una matriz, esto es,

$$G := \begin{bmatrix} \boldsymbol{g_1} & \cdots & \boldsymbol{g_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mt} \end{bmatrix} \in M_{m\times t}(A).$$

Sea $Syz(G)$ generada por $\boldsymbol{z'_1}, \cdots, \boldsymbol{z'_l}$, entonces esta puede ser escrita como

$$Syz(G) := Z(G) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{z'_1} & \cdots & \boldsymbol{z'_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{11} & \cdots & z'_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ z'_{t1} & \cdots & z'_{tl} \end{bmatrix} \in M_{t\times l}(A)$$

y

$$Z(G)^T G^T = 0. \tag{3.2}$$

Ahora a partir de G, definimos la matriz L_G como se muestra a continuación,

$$L_G := \begin{bmatrix} lt(\boldsymbol{g_1}) & \cdots & lt(\boldsymbol{g_t}) \end{bmatrix}$$

Sea $Syz(L)$ generada por $\boldsymbol{z_1''}, \cdots, \boldsymbol{z_l''}$, entonces esta puede ser escrita como

$$Syz(L_G) := Z(L_G) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_1''} & \cdots & \boldsymbol{z_l''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}'' & \cdots & z_{1l}'' \\ \vdots & & \vdots \\ z_{t1}'' & \cdots & z_{tl}'' \end{bmatrix} \in M_{t\times l}(A).$$

Para calcular $Syz(G)$ a partir de $Syz(L_G)$, primero se aplica el algoritmo de división y el corolario 2.3.1 a las columnas de $Syz(L_G)$, para obtener polinomios $p_{1v}, \ldots, p_{tv} \in A$ para cada $1 \leq v \leq l$, tales que

$$z_{1v}''\boldsymbol{g_1} + \cdots + z_{tv}''\boldsymbol{g_t} = p_{1v}\boldsymbol{g_1} + \cdots + p_{tv}\boldsymbol{g_t}$$

es decir,

$$Z(L_G)^T G^T = P^T G^T, \tag{3.3}$$

donde

$$P := \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{t1} & \cdots & p_{tl} \end{bmatrix} \in M_{t\times l}(A).$$

Con esta notación, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3. *Sean A una extension $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva. El módulo columna de $Z(G)$ coincide con el módulo columna de $Z(L_G) - P$, es decir, en notación matricial,*

$$Z(G) = Z(L_G) - P,$$

donde las columnas de la matriz $Z(L_G)$ son sicigias homogéneas.

Demostración: De (3.3), se tiene que $(Z(L_G) - P)^T G^T = 0$, entonces cada columna de la matriz $Z(L_G) - P$ esta en $Syz(G)$, es decir, cada columna de $Z(L_G) - P$ es una A-combinación lineal de las columnas de $Z(G)$.

Para probar que el módulo columna de $Z(G)$ está contenido en el módulo columna de $Z(L_G)-P$, se supone que esto no ocurre, por tanto, existe una columna $\boldsymbol{z'} = (z_1', \ldots, z_t')^T \in Z(G)$ que no es una A-combinación lineal de las columnas de $Z(L_G) - P$. De todas las columnas de $Z(G)$ que cumplen la condición señalada, se escoge una tal que

$$\boldsymbol{X} := \text{máx}\{lm(lm(z'_j)lm(\boldsymbol{g_j}))\}_{j=1}^{t}$$

sea mínimo, con $\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}$ para algún $i \in \{1,\ldots,m\}$. Sea

$$J := \{j \in \{1,\ldots,t\} \mid lm(lm(z'_j)lm(\boldsymbol{g_j})) = \boldsymbol{X}\}.$$

Como $\boldsymbol{z'} \in Syz(G)$ y A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa, entonces

$$\sum_{j\in J} lt(z'_j)lt(\boldsymbol{g_j}) = \boldsymbol{0}. \tag{3.4}$$

Sea $\boldsymbol{h} := \sum_{j\in J} lt(z'_j)\boldsymbol{\tilde{e}_j}$ donde $\{\boldsymbol{\tilde{e}_1},\ldots,\boldsymbol{\tilde{e}_t}\}$ es la base canónica de A^t, luego debido a la igualdad (3.4) y a la condición requerida para $\boldsymbol{z'}$, se tiene que $\boldsymbol{h} \in Syz(lt(\boldsymbol{g_1}),\ldots,lt(\boldsymbol{g_t}))$ es una sicigia homogénea de grado $\boldsymbol{X}$. Como $\{\boldsymbol{z''_1},\ldots,\boldsymbol{z''_l}\}$ es un conjunto de generadores de sicigias homogéneas para $Syz(lt(\boldsymbol{g_1}),\ldots,lt(\boldsymbol{g_t}))$ con $\boldsymbol{z''_v} = (z''_{1v},\ldots,z''_{tv})^T$ de grado $\boldsymbol{Z_v} = Z_v\boldsymbol{e_{i_v}}$ donde los z''_{kv} son términos, esto para $1 \leq v \leq l$ y $1 \leq k \leq t$.

De acuerdo con esto, existen $a_v \in A$ con $1 \leq v \leq l$, tales que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &= a_1\boldsymbol{z''_1} + \cdots + a_l\boldsymbol{z''_l} \\
&= a_1\begin{bmatrix} z''_{11} \\ \vdots \\ z''_{t1} \end{bmatrix} + \cdots + a_l\begin{bmatrix} z''_{1l} \\ \vdots \\ z''_{tl} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1z''_{11} + \cdots + a_lz''_{1l} \\ \vdots \\ a_1z''_{t1} + \cdots + a_lz''_{tl} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tales $a_v \in A$ con $1 \leq v \leq l$ se pueden expresar como una suma ordenada de s términos, adicionando sumandos nulos si es necesario, así

$$a_v := c_{1v}X_{1v} + \cdots + c_{sv}X_{sv}$$

con $X_{1v} \succ \cdots \succ X_{sv}$. Ahora al observar la primera entrada de $\boldsymbol{h}$, se tiene que

$$a_1 z''_{11} + \cdots + a_l z''_{1l} = (c_{11}X_{11} + \cdots + c_{s1}X_{s1})z''_{11} + \cdots + (c_{1l}X_{1l} + \cdots + c_{sl}X_{sl})z''_{1l}$$

donde

$$lm(X_{11}lm(z''_{11})) \succ \cdots \succ lm(X_{s1}lm(z''_{11}))$$
$$\vdots$$
$$lm(X_{1l}lm(z''_{1l})) \succ \cdots \succ lm(X_{sl}lm(z''_{1l}))$$

Como $\boldsymbol{h}$ es una sicigia homogénea, cada una de sus entradas es un término, en particular la primera entrada, luego por ser A una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa y por las desigualdades anteriores, se concluye que cada a_v con $1 \leq v \leq l$ es un término.

Para cada $j \in J$ se tiene que

$$lt(z'_j) = a_1 z''_{j1} + \cdots + a_l z''_{jl} \tag{3.5}$$

y para $j \notin J$,

$$a_1 z''_{j1} + \cdots + a_l z''_{jl} = 0.$$

Además para cada $j \in J$ se cumple que $lm(lm(a_1 z''_{j1} + \cdots + a_l z''_{jl})lm(\boldsymbol{g_j})) = lm(lm(z'_j)lm(\boldsymbol{g_j})) = \boldsymbol{X}$ y de acuerdo con (3.5) existe algún v tal que $lm(a_v z''_{jv}) = lm(z'_j)$, entonces para j y este v se tiene

$$lm(lm(a_v)lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j})) = \boldsymbol{X} = X\boldsymbol{e_i}.$$

Por otro lado, sea $j' \in \{1, \ldots, t\}$ con $j' \neq j$, como $\boldsymbol{z''_v}$ es una sicigia homogénea de grado $\boldsymbol{Z_v} = Z_v\boldsymbol{e_{i_v}}$, entonces si $z''_{j'v} \neq 0$, se tiene que $lm(lm(z''_{j'v})lm(\boldsymbol{g_j})) = \boldsymbol{Z_v} = lm(lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))$, luego se puede concluir que $i_v = i$ y

$$lm(lm(a_v)lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j})) = \boldsymbol{X} \tag{3.6}$$

para todo v y todo j tal que $a_v \neq 0$ y $z''_{jv} \neq 0$.

Ahora se define $\boldsymbol{\tilde{z}} := (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_t)^T$ donde $\tilde{z}_j = z'_j$ si $j \notin J$ y $\tilde{z}_j = z'_j - lt(z'_j)$ si $j \in J$. De acuerdo con las definiciones de $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{\tilde{z}}$ se tiene que $\boldsymbol{z'} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{\tilde{z}}$, que también puede verse como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z'} &= \sum_{v=1}^{l} a_v \boldsymbol{z''_v} + \boldsymbol{\tilde{z}}\\ &= \sum_{v=1}^{l} a_v(\boldsymbol{s_v} + \boldsymbol{p_v}) + \boldsymbol{\tilde{z}}\end{aligned}$$

con $\boldsymbol{s_v} = \boldsymbol{z''_v} - \boldsymbol{p_v}$. También se define

$$\boldsymbol{r} = \sum_{v=1}^{l} a_v \boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{\tilde{z}}$$

luego $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{z'} - \sum_{v=1}^{l} a_v \boldsymbol{s_v}$ es una A-combinación lineal de las columnas de $Z(G) - (Z(L_G) - P)$.

La idea ahora es mostrar que $\text{máx}\{lm(lm(r_j)lm(\boldsymbol{g_j}))\}_{j=1}^{t} \prec \boldsymbol{X}$ y así llegar a una contradicción con la escogencia de $\boldsymbol{z'}$. Para cada $1 \leq j \leq t$ se tiene

$$r_j = a_1 p_{j1} + \cdots + a_l p_{jl} + \tilde{z}_j$$

por tanto

$$\begin{aligned}lm(lm(r_j)lm(\boldsymbol{g_j})) &= lm(lm(a_1 p_{j1} + \cdots + a_l p_{jl} + \tilde{z}_j)lm(\boldsymbol{g_j}))\\ &\preceq lm(\text{máx}\{lm(a_1 p_{j1} + \cdots + a_l p_{jl}), lm(\tilde{z}_j)\}lm(\boldsymbol{g_j}))\\ &\preceq lm(\text{máx}\{\max_{1\leq v\leq l}\{lm(lm(a_v)lm(p_{jv}))\}, lm(\tilde{z}_j)\}lm(\boldsymbol{g_j}))\end{aligned}$$

Por la definición de $\boldsymbol{\tilde{z}}$, se tiene que si $j \notin J$, entonces $lm(lm(\tilde{z}_j)lm(\boldsymbol{g_j})) = lm(lm(z'_j)lm(\boldsymbol{g_j})) \prec \boldsymbol{X}$ y para todo $j \in J$, $lm(lm(\tilde{z}_j)lm(\boldsymbol{g_j})) = lm(lm(z'_j - lt(z'_j))lm(\boldsymbol{g_j})) \prec \boldsymbol{X}$, por tanto, para cada $1 \leq j \leq t$, se cumple que $lm(lm(\tilde{z}_j)lm(\boldsymbol{g_j})) \prec \boldsymbol{X}$.

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{t} z''_{jv} \boldsymbol{g_j} = \sum_{j=1}^{t} p_{jv} \boldsymbol{g_j}$$

con

$$lm\left(\sum_{j=1}^{t} z''_{jv}\boldsymbol{g_j}\right) = \max_{1\leq j\leq t}\{lm(lm(p_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\}.$$

Pero se tiene que $\boldsymbol{z''_v} \in Syz(L_G)$, luego

$$\sum_{j=1}^{t} z''_{jv}lt(\boldsymbol{g_j}) = \boldsymbol{0}$$

para cada $1 \leq v \leq l$, entonces

$$lm\left(\sum_{j=1}^{t} z''_{jv}\boldsymbol{g_j}\right) \prec \max_{1\leq j\leq t}\{lm(lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\},$$

por tanto

$$\max_{1\leq j\leq t}\{lm(lm(p_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\} \prec \max_{1\leq j\leq t}\{lm(lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\}$$

para cada $1 \leq v \leq l$.

Debido a la desigualdad anterior y a la igualdad (3.6), se obtiene que

$$\max_{\substack{1\leq j\leq t\\ 1\leq v\leq l}}\{lm(lm(a_v)lm(p_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\} \prec \max_{\substack{1\leq j\leq t\\ 1\leq v\leq l}}\{lm(lm(a_v)lm(z''_{jv})lm(\boldsymbol{g_j}))\} = \boldsymbol{X}.$$

Entonces se deduce que $\max\{lm(lm(r_j)lm(\boldsymbol{g_j}))\}_{j=1}^{t} \prec \boldsymbol{X}$, y como este resultado produce una contradicción, se concluye que el módulo columna de $Z(G)$ está contenido en el módulo columna de $Z(L_G) - P$. □

Finalmente, se calculará $Syz(F)$ usando $Syz(G)$. Como $G := \{\boldsymbol{g_1}, \cdots, \boldsymbol{g_t}\}$ una base de Gröbner para M, entonces del algoritmo de división y el corolario 2.3.1 se obtienen polinomios $q_{ij} \in A$ con $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq s$ tales que

$$\boldsymbol{f_1} = q_{11}\boldsymbol{g_1} + \cdots + q_{t1}\boldsymbol{g_t}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{f_s} = q_{1s}\boldsymbol{g_1} + \cdots + q_{ts}\boldsymbol{g_t}$$

es decir,

$$F^T = Q^T G^T, \tag{3.7}$$

con

$$Q := \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{t1} & \cdots & q_{ts} \end{bmatrix} \in M_{t\times s}(A).$$

Del algoritmo presentado en el corolario 2.3.2 se observa que cada elemento de G puede ser expresado como una A-combinación lineal de columnas de F, esto es, existen polinomios $h_{ij} \in A$ con $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t$ tales que

$$\boldsymbol{g_1} = h_{11}\boldsymbol{f_1} + \cdots + h_{s1}\boldsymbol{f_s}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{g_t} = h_{1t}\boldsymbol{f_1} + \cdots + h_{st}\boldsymbol{f_s}$$

es decir,

$$G^T = H^T F^T, \tag{3.8}$$

con

$$H := \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{s1} & \cdots & h_{st} \end{bmatrix} \in M_{s\times t}(A).$$

Teorema 3.1.4. *Sean A una extension $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva. Con la notación anterior, $Syz(F)$ coincide con el módulo columna de la matriz extendida $\left[(Z(G)^T H^T)^T \quad I_s - (Q^T H^T)^T\right]$, es decir, en notación matricial,*

$$Syz(F) = \left[(Z(G)^T H^T)^T \quad I_s - (Q^T H^T)^T\right]$$

Demostración: Sea $\boldsymbol{z} := (z_1, \ldots, z_s)^T$ uno de los generadores de $Syz(F)$, es decir, una de las columnas de $Z(F)$, luego $\boldsymbol{z}^T F^T = \boldsymbol{0}$ y como $F^T = Q^T G^T$ entonces $\boldsymbol{z}^T Q^T G^T = \boldsymbol{0}$. Sea

$\boldsymbol{u} := (\boldsymbol{z}^T Q^T)^T \in A^t$, luego $\boldsymbol{u} \in Syz(G)$ pues

$$\boldsymbol{u}^T G^T = \boldsymbol{z}^T Q^T G^T = \boldsymbol{0},$$

por tanto existen polinomios $w_1, \ldots, w_l \in A$ tales que

$$\boldsymbol{u} = w_1 \boldsymbol{z_1'} + \cdots + w_l \boldsymbol{z_l'}$$

es decir, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w}^T Z(G)^T)^T$ con $\boldsymbol{w} := (w_1, \ldots, w_l)^T$.

Entonces, $\boldsymbol{u}^T H^T = \boldsymbol{w}^T Z(G)^T H^T$, es decir, $\boldsymbol{z}^T Q^T H^T = \boldsymbol{w}^T Z(G)^T H^T$, luego

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}^T &= \boldsymbol{z}^T Q^T H^T + \boldsymbol{z}^T - \boldsymbol{z}^T Q^T H^T \\
&= \boldsymbol{z}^T Q^T H^T + \boldsymbol{z}^T (I_s - Q^T H^T) \\
&= \boldsymbol{w}^T Z(G)^T H^T + \boldsymbol{z}^T (I_s - Q^T H^T).
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior, desarrollando las operaciones indicadas, se verifica que $\boldsymbol{z}$ pertenece al módulo columna de la matriz extendida $\begin{bmatrix}(Z(G)^T H^T)^T & I_s - (Q^T H^T)^T\end{bmatrix}$, es decir, $\boldsymbol{z}$ es una A-combinación lineal de columnas de esta matriz.

Por otro lado, de (3.8) y (3.2), se obtiene que $(Z(G)^T H^T) F^T = Z(G)^T (H^T F^T) = Z(G)^T G^T = 0$, esto es, cada columna de la matriz $(Z(G)^T H^T)^T$ esta en $Syz(F)$. De manera similar se tiene que $(I_s - (Q^T H^T)^T)^T F^T = (I_s - Q^T H^T) F^T = F^T - Q^T H^T F^T = F^T - Q^T G^T = F^T - F^T = 0$, lo que significa que cada columan de la matriz $I_s - (Q^T H^T)^T$ esta en $Syz(F)$.

De lo anterior se puede concluir que

$$Syz(F) = \begin{bmatrix}(Z(G)^T H^T)^T & I_s - (Q^T H^T)^T\end{bmatrix}. \qquad \square$$

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento desarrrollado anteriormente para encontrar las sicigias de un módulo.

Ejemplo 3.1.1. En el ejemplo 2.3.1 se calculó una base de Gröbner G, para $M := \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2} \rangle$ con respecto al orden TOPREV sobre $Mon(A^2)$ y al orden deglex sobre $Mon(A)$, donde $\boldsymbol{f_1} = x_1^2 x_2^2 \boldsymbol{e_1} + x_2 x_3 \boldsymbol{e_2}$ y $\boldsymbol{f_2} = 2x_1 x_2 x_3 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2}$ estan en A^2 con $A = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3 \rangle$ y

$G = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$, donde $\boldsymbol{f_3} = 12x_2x_3^2\boldsymbol{e_2} - \frac{9}{4}x_1x_2^2\boldsymbol{e_2}$. A continuación se hallará $Syz(F)$ con $F = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$:

1. Hallar $Syz(L_G)$, para esto es suficiente encontrar un conjunto de generadores de sicigias homogéneas, teniendo en cuenta que

$$L := \begin{bmatrix} lt(\boldsymbol{f_1}) & lt(\boldsymbol{f_2}) & lt(\boldsymbol{f_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2x_2^2\boldsymbol{e_1} & 2x_1x_2x_3\boldsymbol{e_1} & 12x_2x_3^2\boldsymbol{e_2} \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(A)$$

Se inicia seleccionando los subconjuntos J de $\{1,2,3\}$ que son saturados con respecto a $\{x_2^2\boldsymbol{e_1}, x_2x_3\boldsymbol{e_1}, x_2x_3^2\boldsymbol{e_2}\}$ y que además $\boldsymbol{X_J} \neq 0$:

- En el caso de $J_1 = \{1\}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1}))$ y $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{J_1}}) - \beta_1$, es $B^{J_1} = \{0\}$, luego sólo tenemos un generador $\boldsymbol{b_1^{J_1}} = b_{11}^{J_1} = 0$ y $\boldsymbol{s_1^{J_1}} = b_{11}^{J_1}x^{\gamma_1}\tilde{\boldsymbol{e_1}} = 0\tilde{\boldsymbol{e_1}}$, donde $\tilde{\boldsymbol{e_1}} = (1,0,0)^T$.

- En el caso de $J_2 = \{2\}$, $B^{J_2} = \{0\}$, luego $\boldsymbol{s_1^{J_2}} = 0\tilde{\boldsymbol{e_2}}$ donde $\tilde{\boldsymbol{e_2}} = (0,1,0)^T$.

- En el caso de $J_3 = \{3\}$, $B^{J_3} = \{0\}$, luego $\boldsymbol{s_1^{J_3}} = 0\tilde{\boldsymbol{e_3}}$ donde $\tilde{\boldsymbol{e_3}} = (0,0,1)^T$.

- En el caso de $J_{1,2} = \{1,2\}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}],$$

con $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1}))$, $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{f_2}))$, $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_1$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_2$, es $B^{J_{1,2}} = \{(4, -\frac{9}{4}x_1)\}$, luego sólo tenemos un generador $\boldsymbol{b_1^{J_{1,2}}} = (b_{11}^{J_{1,2}}, b_{12}^{J_{1,2}}) = (4, -\frac{9}{4}x_1)$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_1^{J_{1,2}}} &= b_{11}^{J_{1,2}}x^{\gamma_1}\tilde{\boldsymbol{e_1}} + b_{12}^{J_{1,2}}x^{\gamma_2}\tilde{\boldsymbol{e_2}} \\ &= 4x_3\tilde{\boldsymbol{e_1}} - \frac{9}{4}x_1x_2\tilde{\boldsymbol{e_2}} \\ &= \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -\frac{9}{4}x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$Syz(L_G) = \left\langle \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -\frac{9}{4}x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

en notación matricial,

$$Syz(L_G) = Z(L_G) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -\frac{9}{4}x_1x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Hallar $Syz(G)$: Por el algoritmo de división se tiene que

$$4x_3\boldsymbol{f_1} - \frac{9}{4}x_1x_2\boldsymbol{f_2} + 0 = p_{11}\boldsymbol{f_1} + p_{21}\boldsymbol{f_2} + p_{31}\boldsymbol{f_3}$$

luego $p_{11} = 0 = p_{21}$ y $p_{31} = 1$, esto es la matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y como

$$\begin{aligned} Z(G) &= Z(L_G) - P \\ &= \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -\frac{9}{4}x_1x_2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$Syz(G) = \left\langle \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -\frac{9}{4}x_1x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3. Hallar $Syz(F)$: Como

$$\boldsymbol{f_1} = 1\boldsymbol{f_1} + 0\boldsymbol{f_2} + 0\boldsymbol{f_3}$$

$$\boldsymbol{f_2} = 0\boldsymbol{f_1} + 1\boldsymbol{f_2} + 0\boldsymbol{f_3}$$

por tanto

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

También se tiene que

$$\boldsymbol{f_1} = 1\boldsymbol{f_1} + 0\boldsymbol{f_2}$$

$$\boldsymbol{f_2} = 0\boldsymbol{f_1} + 1\boldsymbol{f_2}$$

$$\boldsymbol{f_3} = 4x_3\boldsymbol{f_1} - \frac{9}{4}x_1x_2\boldsymbol{f_2}$$

por tanto

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4x_3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4}x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Según el teorema 3.1.4 se cumple que

$$Syz(F) = \begin{bmatrix} (Z(G)^T H^T)^T & I_2 - (Q^T H^T)^T \end{bmatrix}$$

luego,

$$\begin{aligned}
(Z(G)^T H^T)^T &= \left(\begin{bmatrix} 4x_3 & -\frac{9}{4}x_1x_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4x_3 & -\frac{9}{4}x_1x_2 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$I_2 - (Q^T H^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto $Syz(F) = 0$.

Ejemplo 3.1.2. En el ejemplo 2.3.2 se calculó una base de Gröbner G, para $M := \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2} \rangle$ con respecto al orden TOPREV sobre $Mon(A^2)$ y al orden deglex sobre $Mon(A)$, donde $\boldsymbol{f_1} = (2x_1 + 1)x_2^2\boldsymbol{e_1} + x_2x_3\boldsymbol{e_2}$ y $\boldsymbol{f_2} = (4x_1^2 + x_1)x_2^3\boldsymbol{e_1} + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e_2}$ estan en A^2 con $A = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3 \rangle$ y $G = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$.

Se hallará $Syz(F)$ con $F = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$, pero como en este caso $F = G$, entonces basta calcular $Syz(G)$:

1. Hallar $Syz(L_G)$, para esto es suficiente encontrar un conjunto de generadores de sicigias homogéneas, teniendo en cuenta que

$$L := \begin{bmatrix} lt(\boldsymbol{f_1}) & lt(\boldsymbol{f_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e_1} & (4x_1^2+x_1)x_2^3\boldsymbol{e_1} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(A)$$

Se inicia seleccionando los subconjuntos J de $\{1,2\}$ que son saturados con respecto a $\{x_2^2\boldsymbol{e_1}, x_2^3\boldsymbol{e_1}\}$ y que además $\boldsymbol{X_J} \neq 0$:

. En el caso de $J_1 = \{1\}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1}))$ y $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{J_1}}) - \beta_1$, es $B^{J_1} = \{0\}$, luego sólo tenemos un generador $\boldsymbol{b_1^{J_1}} = b_{11}^{J_1} = 0$ y $\boldsymbol{s_1^{J_1}} = b_{11}^{J_1}x^{\gamma_1}\boldsymbol{e_1} = 0\boldsymbol{e_1}$.

. En el caso de $J_{1,2} = \{1,2\}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{f_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{f_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}],$$

con $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{f_1}))$, $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{f_2}))$, $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_1$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_2$, es $B^{J_{1,2}} = \{(x_1, -1)\}$, luego sólo tenemos un generador $\boldsymbol{b_1^{J_{1,2}}} = (b_{11}^{J_{1,2}}, b_{12}^{J_{1,2}}) = (x_1, -1)$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_1^{J_{1,2}}} &= b_{11}^{J_{1,2}}x^{\gamma_1}\boldsymbol{e_1} + b_{12}^{J_{1,2}}x^{\gamma_2}\boldsymbol{e_2} \\ &= x_1x_2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$Syz(L_G) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

en notación matricial,

$$Syz(L_G) = Z(L_G) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Hallar $Syz(G)$: Por el algoritmo de división se tiene que

$$0 = x_1x_2\boldsymbol{f_1} - \boldsymbol{f_2} = p_{11}\boldsymbol{f_1} + p_{21}\boldsymbol{f_2}$$

luego $p_{11} = 0 = p_{21}$, esto es la matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Y como

$$\begin{aligned} Z(G) &= Z(L_G) - P \\ &= \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$Syz(G) = Syz(F) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3.2. Presentación de un módulo

Para $M = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s \rangle \in A^m$, con A una extensión $\sigma - PBW$, existe un homomorfismo natural sobreyectivo $\pi_M : A^s \longrightarrow M$ definido por $\pi_M(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{f}_i$, donde $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^{s}$ es la base canónica de A^s, así, dado $(a_1, \ldots, a_s) \in A^s$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_M((a_1, \ldots, a_s)) &= \pi_M((a_1\boldsymbol{e}_1, \ldots, a_s\boldsymbol{e}_s)) \\ &= a_1\pi_M(\boldsymbol{e}_1), \ldots, a_s\pi_M(\boldsymbol{e}_s) \\ &= a_1\boldsymbol{f}_1, \ldots, a_s\boldsymbol{f}_s \end{aligned}$$

Por el primer teorema de isomorfismo se tiene

$$A^s / Ker(\pi_M) \cong M$$

dado por el isomorfismo $\bar{\pi}_M : A^s / Ker(\pi_M) \longrightarrow M$, definido por $\bar{\pi}_M(\bar{\boldsymbol{e}}_i) = \boldsymbol{f}_i$ donde $\bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i + Ker(\pi_M)$.

Definición 3.2.1. *Si $M \cong A^s / \, Ker(\pi_M)$ se dice que $A^s / \, Ker(\pi_M)$ es una presentación de M.*

También se tiene que $Ker(\pi_M)$ es un submódulo de A^s finitamente generado pues A^s es noetheriano. Por tanto M es un módulo finitamente presentado.

Sea $Ker(\pi_M) = \langle \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_{s_1} \rangle$, entonces se construye la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
A^{s_1} \arrow[rr, "\delta_M"] \arrow[dr, "\pi_K"'] & & A^s \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dl, "l_M"] & M \arrow[r] & 0 \\
& Ker(\pi_M) & & &
\end{tikzcd}$$

donde $\delta_M = l_M \circ \pi_K$.

Se observa que $Ker(\pi_M) = Syz(M) = Syz(F)$ donde $F = [\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s] \in M_{m \times s}(A)$. Por tanto los teoremas 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4 que permiten calcular $Syz(M)$ utlizando bases de Gröbner, proporcionan un método para calcular una presentación de M, teninedo en cuenta que A debe ser una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva.

Por otro lado, sea Δ_M la matriz de representación de δ_M en las bases canónicas de A^{s_1} y A^s, entonces las columnas de Δ_M son los generadores de $Syz(F)$ puesto que $Im(\delta_M) = Ker(\pi_M)$ y $Im(\delta_M) = \langle \Delta_M \rangle$, es decir $Im(\delta_M)$ es el módulo columna de Δ_M. Explícitamente, la matriz Δ_M es

$$\Delta_M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 & \cdots & \boldsymbol{h}_{s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{s1} & \cdots & h_{ss_1} \end{bmatrix} \in M_{s \times s_1}(A)$$

pues $\delta_M(\tilde{\boldsymbol{e}}_i) = \boldsymbol{h}_i = h_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + h_{si}\boldsymbol{e}_s$, con $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i\}_{i=1}^{s_1}$ la base canónica de A^{s_1}. Con la notación de la sección anterior se concluye que $\Delta_M = Z(F)$.

Definición 3.2.2. *La matriz $\Delta_M = Z(F)$ es la matriz de presentación de M.*

Se observa que si $Ker(\pi_M) = Syz(F) = 0$, es decir , si $\Delta_M = Z(F) = 0$, entonces M es libre con $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s\}$ una base.

3.2.1. Presentación de un módulo cociente

Sean M, N submódulos de A^m tales que $N \subseteq M$, donde $M = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s \rangle$, $N = \langle \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_t \rangle$ y $M/N = \langle \bar{\boldsymbol{f}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{f}}_s \rangle$, entonces se tiene un isomorfismo canónico sobreyectivo $A^s \longrightarrow M/N$, tal que una presentación de M/N está dada por

$$M/N \cong A^s/Syz(M/N)$$

donde los elementos de $Syz(M/N)$ cumplen la siguiente relación: $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in Syz(M/N)$ si, y sólo si, $a_1\bar{\boldsymbol{f}}_1 + \cdots + a_s\bar{\boldsymbol{f}}_s = \bar{0}$ si, y sólo si, $\overline{a_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + a_s\boldsymbol{f}_s} = \bar{0}$ si, y sólo si, $a_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + a_s\boldsymbol{f}_s \in N = \langle \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_t \rangle$ si, y sólo si, existen $a_{s+1}, \ldots, a_{s+t} \in A$ tales que $a_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + a_s\boldsymbol{f}_s + a_{s+1}\boldsymbol{h}_1, \ldots, a_{s+t}\boldsymbol{h}_t = 0$ si y sólo si $(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_{s+t}) \in Syz(R) = 0$ donde

$$R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \boldsymbol{f}_s & \boldsymbol{h}_1 & \cdots & \boldsymbol{h}_t \end{bmatrix} \in M_{m\times(s+t)}(A).$$

Lo descrito anteriormente permite formular una manera de calcular $Syz(M/N)$ a través de $Syz(R)$, lo que involucra el cálculo de bases de Gröbner y por consiguiente las condiciones de cuasi-conmutatividad y biyectividad sobre la extensión $\sigma - PBW$ A; como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sean M, N submódulos de A^m con A una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva y $N \subseteq M$, donde $M = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s \rangle$ y $N = \langle \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_t \rangle$, entonces una presentación de M/N es $A^s/Syz(M/N)$ donde un conjunto de generadores para $Syz(M/N)$ es el conjunto de los vectores que corresponden a las primeras s componentes de los vectores generadores de $Syz(R)$ donde $R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \boldsymbol{f}_s & \boldsymbol{h}_1 & \cdots & \boldsymbol{h}_t \end{bmatrix} \in M_{m\times(s+t)}(A)$.*

3.3. Núcelo e imagen de un homomorfismo

Otras aplicaciones elementales del cálculo de sicigias son mostradas a continuación.

3.3.1. Núcleo de un homomorfismo entre A-módulos

Sean $M \subseteq A^m$ y $N \subseteq A^l$ módulos, tales que $M = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s \rangle$ y $N = \langle \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_t \rangle$ y sea $\phi : M \longrightarrow N$ un homomorfismo, definido de manera que $\phi(\boldsymbol{f}_i) = \phi_{1i}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \phi_{ti}\boldsymbol{g}_t$, el cual induce la matriz:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{t1} & \cdots & \phi_{ts} \end{bmatrix} \in M_{t\times s}(A)$$

Usando la notación de la sección anterior, sean $A^s/Syz(M)$ y $A^t/Syz(N)$ las presentaciones de M y N respectivamente. Al considerar los isomorfismos canónicos

$$\bar{\pi}_M : A^s/Syz(M) \longrightarrow M \text{ y } \bar{\pi}_N : A^s/Syz(N) \longrightarrow N$$

definidos por $\bar{\pi}_M(\bar{\boldsymbol{e}}_i) = \boldsymbol{f}_i$ donde $\bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i + Ker(\pi_M)$ y $\bar{\pi}_N(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) = \boldsymbol{g}_j$ donde $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_j + Ker(\pi_N)$, con $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^s$ la base canónica de A^s y $\{\boldsymbol{\varepsilon}_j\}_{j=1}^t$ la base canónica de A^t; se construye el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(\overline{\pi_M})^{-1}"'] & N \arrow[d, "(\overline{\pi_N})^{-1}"] \\ A^s/Syz(M) \arrow[r, "\bar{\phi}"] & A^t/Syz(N) \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\phi}(\bar{\boldsymbol{e}}_i) = (\overline{\pi_N})^{-1} \circ \phi \circ \overline{\pi_M}(\bar{\boldsymbol{e}}_i) = (\overline{\pi_N})^{-1}(\phi(\boldsymbol{f}_i)) = (\overline{\pi_N})^{-1}(\phi_{1i}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \phi_{ti}\boldsymbol{g}_t) = \phi_{1i}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + \phi_{ti}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ con $1 \leq i \leq s$. De acuerdo con la definición de $\overline{\phi}$ se tiene que el diagrama anterior conmuta, tambien se tiene que $Ker(\phi) \cong Ker(\bar{\phi})$, pues restringiendo el dominio de $\bar{\pi}_M$ al conjunto $Ker(\bar{\phi})$, sólo faltaría mostrar que la imagen de $\bar{\pi}_M \mid_{Ker(\bar{\phi})}$ es $Ker(\phi)$ y en efecto, sea $\bar{m} \in Ker(\bar{\phi})$, entonces $0 = \bar{\phi}(\bar{m}) = (\bar{\pi}_N)^{-1}(\phi(\bar{\pi}_M(\bar{m})))$ y como $(\bar{\pi}_N)^{-1}$ es inyectiva, entonces $\phi(\bar{\pi}_M(\bar{m})) = 0$, es decir, $\bar{\pi}_M(\bar{m}) \in Ker(\phi)$.

Restringiendo el dominio de $\bar{\pi}_N$ al conjunto $Im(\bar{\phi})$, se obtiene que $Im(\bar{\phi}) \cong Im(\phi)$, pues dado $\bar{p} \in Im(\bar{\phi})$, existe un $\bar{k} \in A^s/Syz(M)$ tal que $\bar{p} = \bar{\phi}(\bar{k})$, luego $\bar{p} = (\bar{\pi}_N)^{-1}(\phi(\bar{\pi}_M(\bar{k})))$, entonces $\bar{\pi}_N(\bar{p}) = \phi(\bar{\pi}_M(\bar{k}))$ con $\bar{\pi}_M(\bar{k})) \in M$, es decir, $\bar{\pi}_N(\bar{p}) \in Im(\phi)$.

Sea $h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s \in Ker(\phi) \subseteq M$ entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{0}} &= \bar{\pi}_N^{-1}\phi(h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s) \\
&= \bar{\phi}\bar{\pi}_M^{-1}(h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s) \\
&= \bar{\phi}(h_1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + h_s\bar{\boldsymbol{e}}_s) \\
&= h_1\bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{e}}_1) + \ldots + h_s\bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{e}}_s) \\
&= h_1(\phi_{11}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + \phi_{t1}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) + \ldots + h_s(\phi_{1s}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + \phi_{ts}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \\
&= (h_1\phi_{11} + \ldots + h_s\phi_{1s})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + (h_1\phi_{t1} + \ldots + h_s\phi_{ts})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \in A^t/\,Syz(N)
\end{aligned}$$

esto implica que $(h_1\phi_{11} + \ldots + h_s\phi_{1s})\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \ldots + (h_1\phi_{t1} + \ldots + h_s\phi_{ts})\boldsymbol{\varepsilon}_t \in Syz(N)$ y de acuerdo con los teoremas 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4 se puede calcular un conjunto de generadores $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{t_1}\} \subseteq A^t$ para $Syz(N)$, por tanto existen $h_{s+1}, \ldots, h_{s+t_1} \in A$ tales que

$$h_1 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{t1} \end{bmatrix} + \cdots + h_s \begin{bmatrix} \phi_{1s} \\ \vdots \\ \phi_{ts} \end{bmatrix} + h_{s+1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + h_{s+t_1}\boldsymbol{u}_{t_1} = \mathbf{0},$$

luego $(h_1, \ldots, h_s, h_{s+1}, \ldots, h_{s+t_1}) \in Syz(H)$ con

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \cdots & \mathbf{\Phi}_s & \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{t_1} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{\Phi}_i$ es la i-ésima columna de la matriz $\mathbf{\Phi}$ con $1 \leq i \leq s$.

De lo anterior también se puede concluir que

$$h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s \in Ker(\phi) \text{ si y sólo si } \overline{(h_1, \ldots, h_s)} \in Ker(\bar{\phi})$$

pues como $Ker(\phi) \cong Ker(\bar{\phi})$, entonces si $h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s \in Ker(\phi)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_M^{-1}(h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s) &= h_1\bar{\pi}_M^{-1}(\boldsymbol{f}_1) + \ldots + h_s\bar{\pi}_M^{-1}(\boldsymbol{f}_s) \\
&= h_1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + h_s\bar{\boldsymbol{e}}_s \\
&= \overline{(h_1, \ldots, h_s)} \in Ker(\bar{\phi}).
\end{aligned}$$

Entonces se ha probado el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. *Con la anterior notación, sea*

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \cdots & \mathbf{\Phi}_s & \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{t_1} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{\Phi}_i$ *la i-ésima columna de la matriz* $\mathbf{\Phi}$ *con* $1 \leq i \leq s$. *Entonces,*

$$(h_1, \ldots, h_s, h_{s+1}, \ldots, h_{s+t_1}) \in Syz(H) \text{ si y sólo si } h_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_s\boldsymbol{f}_s \in Ker(\phi)$$

Así, si $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_v\} \subseteq A^{s+t_1}$ *es un sistema de generadores de* $Syz(H)$, *sea* $\boldsymbol{z}'_k \in A^s$ *un vector obtenido de* $\boldsymbol{z}_k$ *cuando se omiten las últimas* t_1 *componentes,* $1 \leq k \leq v$, *entonces* $\{\boldsymbol{z}'_1, \ldots, \boldsymbol{z}'_v\}$ *es un sistema de generadores de* $Ker(\bar{\phi})$. *Si* $\boldsymbol{z}'_1 = (h_{11}, \ldots, h_{s1})^T, \ldots,$ $\boldsymbol{z}'_v = (h_{1v}, \ldots, h_{sv})^T$ *entonces* $\{h_{11}\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_{s1}\boldsymbol{f}_s, \ldots, h_{1v}\boldsymbol{f}_1 + \ldots + h_{sv}\boldsymbol{f}_s\}$ *es un sistema de generadores de* $Ker(\phi)$.

Corolario 3.3.1. *Con la notación de esta sección una presentación de* $Ker(\phi)$ *está dada por* A^v/K *donde*

$$K = Syz(Ker(\phi)) = Syz \begin{bmatrix} h_{11}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + h_{s1}\boldsymbol{f}_s & \cdots & h_{1v}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + h_{sv}\boldsymbol{f}_v \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con lo discutido anteriormente, una presentación de $Ker(\bar{\phi})$ está dada por $Ker(\bar{\phi}) \cong A^v/K'$ donde

$$K' = Syz(Ker(\bar{\phi})) = Syz \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}'_1 & \cdots & \bar{\boldsymbol{z}}'_v \end{bmatrix}.$$

Se calcula ahora un sistema de generadores para K'. Si $(l_1, \ldots, l_v) \in Syz \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}'_1 & \cdots & \bar{\boldsymbol{z}}'_v \end{bmatrix}$, entonces

$$l_1\bar{\boldsymbol{z}}'_1 + \ldots + l_v\bar{\boldsymbol{z}}'_v = \bar{\mathbf{0}} \in Ker(\phi) \subseteq A^s/Syz(M)$$

por tanto $l_1\bar{\boldsymbol{z}}'_1 + \ldots + l_v\bar{\boldsymbol{z}}'_v \in Syz(M)$. Si se asume que $Syz(M) = \langle \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \boldsymbol{w}_{s_1} \rangle \subseteq A^s$, entonces existen $l_{v+1}, \ldots, l_{v+s_1} \in A$ tales que

$$l_1\boldsymbol{z}'_1 + \ldots + l_v\boldsymbol{z}'_v + l_{v+1}\boldsymbol{w}_1 + \ldots + l_{v+s_1}\boldsymbol{w}_{s_1} = \mathbf{0},$$

luego $(l_1, \ldots, l_v, l_{v+1}, \ldots, l_{v+s_1}) \in Syz(L)$ donde $L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}'_1 & \cdots & \boldsymbol{z}'_v & \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_{s_1} \end{bmatrix}$.

Entonces se tiene el siguiente corolario

Corolario 3.3.2. *Con la notación anterior, sea*

$$L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}'_1 & \cdots & \boldsymbol{z}'_v & \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_{s_1} \end{bmatrix}$$

entonces

$$(l_1, \ldots, l_v, l_{v+1}, \ldots, l_{v+s_1}) \in Syz(L) \textit{ si y sólo si } (l_1, \ldots, l_v) \in Syz \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}'_1 & \cdots & \bar{\boldsymbol{z}}'_v \end{bmatrix}.$$

Si $\{\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_q\} \subseteq A^{v+s_1}$ *es un sistema de generadores de* $Syz(L)$*, sea* $\boldsymbol{l}'_k \in A^v$ *un vector obtenido de* $\boldsymbol{l}_k$ *cuando se omiten las últimas* s_1 *componentes con* $1 \leq k \leq q$*, entonces* $\{\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_q\}$ *es un sistema de generadores para* K' *y por lo tanto una presentación de* $Ker(\bar{\phi})$ *está dada por* $A^v / K' = A^v / \langle \boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_q \rangle$*.*

3.3.2. Imagen de un homomorfismo entre A-módulos

En esta sección se considera la imagen del homomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$, con $M \subseteq A^m$ y $N \subseteq A^l$ módulos tales que $M = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s \rangle$ y $N = \langle \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_t \rangle$, donde A es una extensión $\sigma - PBW$ cuasi-conmutativa biyectiva. Entonces el siguiente resultado se deduce de las discusiones realizadas anteriormente.

Corolario 3.3.3. *Un sistema de generadores de* $Im(\phi)$ *está dado por*

$$Im(\phi) = \langle \phi(\boldsymbol{f}_1), \ldots, \phi(\boldsymbol{f}_s) \rangle = \langle \phi_{11}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \phi_{t1}\boldsymbol{g}_t, \ldots, \phi_{1s}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \phi_{ts}\boldsymbol{g}_t \rangle$$

y una presentación de $Im(\phi)$ *está dada por* A^s / I *donde*

$$I = Syz \begin{bmatrix} \phi_{11}\boldsymbol{g}_1 + \cdots + \phi_{t1}\boldsymbol{g}_t & \cdots & \phi_{1s}\boldsymbol{g}_1 + \cdots + \phi_{ts}\boldsymbol{g}_t \end{bmatrix}.$$

En cuanto a $Im(\bar{\phi})$, de acuerdo con lo desarrollado, se obtuvo que

$$\begin{aligned} Im(\bar{\phi}) &= \langle \bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{e}}_i), \ldots, \bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{e}}_s) \rangle \\ &= \langle \phi_{11}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + \phi_{t1}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \ldots, \phi_{1s}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \ldots + \phi_{ts}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto una presentación de $Im(\bar{\phi})$ está dada por $Im(\bar{\phi}) \cong A^s/\,Syz(Im(\bar{\phi}))$ donde

$$Syz(Im(\bar{\phi})) = Syz\begin{bmatrix}\phi_{11}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \cdots + \phi_{t1}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t & \cdots & \phi_{1s}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \cdots + \phi_{ts}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\end{bmatrix}.$$

Sin embargo, enseguida se calcula una presentación explícita para $Im(\bar{\phi})$, es decir un sistema de generadores para $Syz(Im(\bar{\phi}))$: Sea $(h_1, \ldots, h_s) \in Syz(Im(\bar{\phi}))$ entonces

$$h_1\overline{\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \vdots \\ \phi_{t1}\end{bmatrix}} + \cdots + h_s\overline{\begin{bmatrix}\phi_{1s}\\ \vdots \\ \phi_{ts}\end{bmatrix}} = \bar{\mathbf{0}} \in Im(\bar{\phi}) \in A^t/\,Syz(N)$$

por tanto,

$$h_1\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \vdots \\ \phi_{t1}\end{bmatrix} + \cdots + h_s\begin{bmatrix}\phi_{1s}\\ \vdots \\ \phi_{ts}\end{bmatrix} \in Syz(N)$$

y como $Syz(N) = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{t_1}\rangle \subseteq A^t$, existen $h_{s+1}, \ldots, h_{s+t_1} \in A$ tales que

$$h_1\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \vdots \\ \phi_{t1}\end{bmatrix} + \cdots + h_s\begin{bmatrix}\phi_{1s}\\ \vdots \\ \phi_{ts}\end{bmatrix} + h_{s+1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + h_{s+t_1}\boldsymbol{u}_{t_1} = \mathbf{0}$$

luego $(h_1, \ldots, h_s, h_{s+1}, \ldots, h_{s+t_1}) \in Syz(H)$, donde $H = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_s & \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{t_1}\end{bmatrix}$.

Entonces se ha probado el siguiente corolario.

Corolario 3.3.4. *Sea*

$$H = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_s & \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{t_1}\end{bmatrix}$$

si $\{\boldsymbol{z}'_1, \ldots, \boldsymbol{z}'_v\} \subseteq A^{s+t_1}$ *es un sistema de genradores de* $Syz(H)$*, sea* $\boldsymbol{z}'_k \in A^s$ *un vector obtenido de* $\boldsymbol{z}_k$ *cuando se omiten las últimas* t_1 *componentes con* $1 \leq k \leq v$*, entonces* $\{\boldsymbol{z}'_1, \ldots, \boldsymbol{z}'_v\}$ *es un sistema de generadores para* $Syz(Im(\bar{\phi}))$ *y por lo tanto una presentación de* $Im(\bar{\phi})$ *es* $A^s/\,Syz(Im(\bar{\phi})) = A^s/\,\langle \boldsymbol{z}'_1, \ldots, \boldsymbol{z}'_v\rangle$*.*

Ejemplo 3.3.1. Sea $A = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3\rangle = O_3\left(2, \frac{1}{2}, 3\right)$. Sea $M := \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle \subseteq A^2$ donde $\boldsymbol{f}_1 = x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{f}_2 = 2x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$. Según el ejemplo 3.1.1 $Syz(M) = 0$, por tanto M es un módulo libre con base $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.

Sean $N := \langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \rangle \subseteq A^2$ donde $\boldsymbol{g}_1 = (2x_1 + 1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{g}_2 = (4x_1^2 + x_1)\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2$ y el homomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$ definido por:

$$\phi(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{g}_1 + 2\boldsymbol{g}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{f}_2) = x_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2$$

entonces la matriz Φ inducida por el homomorfismo ϕ es

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Según el ejemplo 3.1.2, se tiene que

$$Syz(N) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

luego

$$H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1x_2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y teninedo en cuenta los teoremas 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4, un sistema de generadores para $Syz(H)$, (véase apéndice A), es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 \\ -2x_1 + \frac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2 \\ 4x_1^2 - 3x_1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + 2x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \\ -\frac{1}{2} - 2x_1^2x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 \\ 4x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \in A^3.$$

Entonces según el teorema 3.3.1 el siguiente conjunto es un sistema de generadores de $Ker(\phi)$:

$$\{\left(2x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2\right)\boldsymbol{f}_1 + (-2x_1 + \tfrac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2)\boldsymbol{f}_2,$$
$$(\tfrac{1}{2}x_1 + 2x_1^2x_2 + \tfrac{1}{2}x_1x_2 + x_1^2x_2^2)\boldsymbol{f}_1 + (-\tfrac{1}{2} - 2x_1^2x_2^2 - \tfrac{3}{2}x_1x_2)\boldsymbol{f}_2\}.$$

En el apéndice B se pueden consultar los cálculos que verifican que los elementos de este conjunto están en $Ker(\phi)$.

Y un sistema de generadores de $Im(\phi)$ es $\{\phi(\boldsymbol{f}_1), \phi(\boldsymbol{f}_2)\} = \{\boldsymbol{g}_1 + 2\boldsymbol{g}_2, x_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2\}$.

APÉNDICE A

Generadores de $Syz(H)$

A continuación se describe el procedimiento para hallar los generadores de $Syz(H)$ donde

$$H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1x_2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

que se omitio en el ejemplo 3.3.1, recordando que se está trabajando en el análogo multiplicativo del álgebra de Weyl $O_3 = \left(2, \frac{1}{2}, 3\right) = \sigma(\mathbb{Q}[x_1])\langle x_2, x_3\rangle$, que cumple las relaciones mencionadas en el ejemplo 2.3.1.

1. Hallar una base de Gröbner para $\langle \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\rangle$, donde $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{h_1}) = \boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{h_2} = x_1\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{h_2}) = \boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{h_3} = x_1x_2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$ con $lm(\boldsymbol{h_2}) = x_2\boldsymbol{e_1}$.

Paso 1: Se inicia con $G := \emptyset$, $G' := \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$. Como $G' \neq G$, se hace $D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_1, S_2, S_3, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{2,3}, S_{1,2,3}\}$, donde $S_1 := \{\boldsymbol{h_1}\}$, $S_2 := \{\boldsymbol{h_2}\}, S_3 := \{\boldsymbol{h_3}\}, S_{1,2} := \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}\}, S_{1,3} := \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_3}\}, S_{2,3} := \{\boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}, S_{1,2,3} := \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, se halla B_S:

- Para S_1 se halla B_{S_1}, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{h_1})) = (0,0)$; $\boldsymbol{X_{S_1}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_1})\} = \boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) = (0,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_1}}) - \beta_1 = (0,\ 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = 1$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$. Luego $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[1] = \{0\}$ y $B_{S_1} = \{0\}$. Por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para S_2 y S_3, se tiene que $B_{S_2} = \{0\} = B_{S_3}$, luego tampoco se adicionan nuevos vectores a G'.

- Para $S_{1,2}$ se halla $B_{S_{1,2}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{h_1})) = (0,0)$ y $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{h_2})) = (0,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{1,2}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_1}), lm(\boldsymbol{h_2})\} = \boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) = (0,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_1 = (0,\ 0)$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2}}}) - \beta_2 = (0,\ 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = 1$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$, y $x^{\gamma_2}x^{\beta_2} = 1$, luego $c_{\gamma_2,\beta_2} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = \sigma_2^0\sigma_3^0(1) = 1$ y $\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} = \sigma_2^0\sigma_3^0(x_1) = x_1$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[1 \quad x_1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1 + b_2x_1 = 0\}$ y $B_{S_{1,2}} = \{(x_1, -1)\}$. Ahora para $(x_1, -1) \in B_{S_{1,2}}$ se hace:

$$\begin{aligned} x_1x^{\gamma_1}\boldsymbol{h_1} - x^{\gamma_2}\boldsymbol{h_2} &= x_1(\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2}) - (x_1\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}) \\ &= 2x_1\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_2} \\ &= (2x_1 - 1)\boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{h_4} \end{aligned}$$

con $lm(\boldsymbol{h_4}) = \boldsymbol{e_2}$. Se observa que $\boldsymbol{h_4}$ no es reducible con respecto a G', es decir, $\boldsymbol{h_4}$ es reducido, entonces se hace $G' = G' \cup \{\boldsymbol{h_4}\}$, es decir, $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}\}$.

- Para $S_{1,3}$ se halla $B_{S_{1,3}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{h_1})) = (0,0)$ y $\beta_3 = \exp(lm(\boldsymbol{h_3})) = (1,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{1,3}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_1}), lm(\boldsymbol{h_3})\} = m.c.m.\{\boldsymbol{e_1}, x_2\boldsymbol{e_1}\} = x_2\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{1,3}}}) = (1,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,3}}}) - \beta_1 = (1,\ 0)$ y $\gamma_3 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,3}}}) - \beta_3 = (0,\ 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_2$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$, y $x^{\gamma_3}x^{\beta_3} = x_2$, luego $c_{\gamma_3,\beta_3} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = \sigma_2\sigma_3^0(1) = 1$ y $\sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3} = \sigma_2^0\sigma_3^0(x_1) = x_1$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[1 \;\; x_1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1 + b_2x_1 = 0\}$ y $B_{S_{1,3}} = \{(x_1, -1)\}$. Ahora para $(x_1, -1) \in B_{S_{1,3}}$ se hace:

$$\begin{aligned} x_1x^{\gamma_1}\boldsymbol{h_1} - x^{\gamma_3}\boldsymbol{h_3} &= x_1x_2(\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2}) - (x_1x_2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}) \\ &= 2x_1x_2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

con $lm(\boldsymbol{p}) = x_2\boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{p}) = 2x_1$.

A continuación se encontrará $\boldsymbol{r}$ reducido con respecto a $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}\}$, tal que $\boldsymbol{p} \xrightarrow{G'}_+ \boldsymbol{r}$:

- ⋆ Se inicia con $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{p}, q_1 := 0, q_2 := 0, q_3 := 0, q_4 := 0$. Como $lm(\boldsymbol{h_4})|lm(\boldsymbol{p})$ se calcula $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tal que $\alpha + exp(lm(\boldsymbol{h_4})) = exp(lm(\boldsymbol{r}))$: $x^\alpha lm(\boldsymbol{h_4}) = lm(\boldsymbol{r})$ luego $(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2})\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, por tanto $x^\alpha = x_2$.
- ⋆ Ahora se calcula $c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}}$: $x^\alpha x^{exp(lm(\boldsymbol{h_4}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}} = 1$.
- ⋆ A continuación se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} lc(\boldsymbol{r}) = 2x_1 &= r_4\sigma^\alpha(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}} \\ &= r_4\sigma_2\sigma_3^0(2x_1 - 1) \\ &= r_4\sigma_2(2x_1 - 1) \\ &= r_4(4x_1 - 1). \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{Q}[x_1]$, por tanto, $\boldsymbol{r}$ es reducido con respecto a G'. Entonces se hace $G' \cup \{\boldsymbol{h_5}\}$ donde $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{p} := \boldsymbol{h_5}$, es decir, $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}\}$.

- Para $S_{2,3}$ se halla $B_{S_{2,3}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} \quad \sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3}]$$

donde $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{h_2})) = (0, 0)$ y $\beta_3 = \exp(lm(\boldsymbol{h_3})) = (1, 0)$; $\boldsymbol{X_{S_{2,3}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_2}), lm(\boldsymbol{h_3})\} = m.c.m.\{\boldsymbol{e_1}, x_2\boldsymbol{e_1}\} = x_2\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{2,3}}}) = (1, 0)$; $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{2,3}}}) - \beta_2 = (1, 0)$ y $\gamma_3 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{2,3}}}) - \beta_3 = (0, 0)$; $x^{\gamma_2}x^{\beta_2} = x_2$, luego $c_{\gamma_2,\beta_2} = 1$, y $x^{\gamma_3}x^{\beta_3} = x_2$, luego $c_{\gamma_3,\beta_3} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} = \sigma_2\sigma_3^0(x_1) = 2x_1$ y $\sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3} = \sigma_2^0\sigma_3^0(x_1) = x_1$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[2x_1 \quad x_1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(2x_1) + b_2x_1 = 0\}$ y $B_{S_{2,3}} = \{(-1, 2)\}$. Ahora para $(-1, 2) \in B_{S_{2,3}}$ se hace:

$$
\begin{aligned}
-x^{\gamma_2}\boldsymbol{h_2} + 2x^{\gamma_3}\boldsymbol{h_3} &= -x_2(x_1\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}) + 2(x_1x_2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}) \\
&= -x_2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{p'}
\end{aligned}
$$

con $lm(\boldsymbol{p'}) = x_2\boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{p'}) = -1$.

A continuación se encontrará $\boldsymbol{r'}$ reducido con respecto a $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}\}$, tal que $\boldsymbol{p'} \xrightarrow{G'}_+ \boldsymbol{r'}$:

- ⋆ Se inicia con $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{p'}, q_1 := 0, q_2 := 0, q_3 := 0, q_4 := 0, q_5 := 0$. Como $lm(\boldsymbol{h_4})|lm(\boldsymbol{p'})$ y $lm(\boldsymbol{h_5})|lm(\boldsymbol{p'})$, se calcula para $j = 4, 5$, $\alpha_j \in \mathbb{N}^2$ tal que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{h_j})) = exp(lm(\boldsymbol{r'}))$: $x^{\alpha_4}lm(\boldsymbol{h_4}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{41}}x_3^{\alpha_{42}})\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{41} = 1$, $\alpha_{42} = 0$, por tanto $x^{\alpha_4} = x_2$. Y $x^{\alpha_5}lm(\boldsymbol{h_5}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{51}}x_3^{\alpha_{52}})x_2\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{51} = 0$, $\alpha_{52} = 0$, por tanto $x^{\alpha_5} = 1$.
- ⋆ Ahora se calcula $c_{\alpha_j,\boldsymbol{h_j}}$: $x^{\alpha_4}x^{exp(lm(\boldsymbol{h_4}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha_4,\boldsymbol{h_4}} = 1$ y $x^{\alpha_5}x^{exp(lm(\boldsymbol{h_5}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha_5,\boldsymbol{h_5}} = 1$.
- ⋆ A continuación se resuelve la ecuación

$$
\begin{aligned}
lc(\boldsymbol{r'}) = -1 &= r_4\sigma^{\alpha_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\alpha_4,\boldsymbol{h_4}} + r_5\sigma^{\alpha_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\alpha_5,\boldsymbol{h_5}} \\
&= r_4\sigma_2\sigma_3^0(2x_1 - 1) + r_5\sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1) \\
&= r_4(4x_1 - 1) + r_5(2x_1)
\end{aligned}
$$

  entonces $r_4 = 1$ y $r_5 = -2$.
- ⋆ Luego se hace $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{r'} - (r_4x^{\alpha_4}\boldsymbol{h_4} + r_5x^{\alpha_5}\boldsymbol{h_5})$, esto es,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r'} &:= \boldsymbol{r'} - (x_2(2x_1 - 1)\boldsymbol{e_2} - 2(2x_1x_2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_2})) \\
&= \boldsymbol{r'} - (2x_2x_1\boldsymbol{e_2} - x_2\boldsymbol{e_2} - 4x_1x_2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_2}) \\
&= \boldsymbol{r'} + x_2\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_2} \\
&= -x_2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_2} + x_2\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

Entonces $\boldsymbol{p'} \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$, por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para $S_{1,2,3}$ se halla $B_{S_{1,2,3}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} \quad \sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{h_1})) = (0,0)$, $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{h_2})) = (0,0)$ y $\beta_3 = \exp(lm(\boldsymbol{h_3})) = (1,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_1}), lm(\boldsymbol{h_2}), lm(\boldsymbol{h_3})\} = x_2\boldsymbol{e_1}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}}) = (1,0)$; $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}}) - \beta_1 = (1,\ 0)$, $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}}) - \beta_2 = (1,\ 0)$ y $\gamma_3 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{1,2,3}}}) - \beta_3 = (0,\ 0)$; $x^{\gamma_1}x^{\beta_1} = x_2$, luego $c_{\gamma_1,\beta_1} = 1$, $x^{\gamma_2}x^{\beta_2} = x_2$, luego $c_{\gamma_2,\beta_2} = 1$, y $x^{\gamma_3}x^{\beta_3} = x_2$, luego $c_{\gamma_3,\beta_3} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} = \sigma_2\sigma_3^0(1) = 1$, $\sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} = \sigma_2\sigma_3^0(x_1) = 2x_1$ y $\sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3} = \sigma_2^0\sigma_3^0(x_1) = x_1$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[1 \quad 2x_1 \quad x_1] = \{(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{Q}[x_1]^3 \mid b_1 + b_2(2x_1) + b_3x_1 = 0\}$ y $B_{S_{1,2,3}} = \{(x_1,0,-1),(0,-1,2)\}$. Ahora para $(x_1,0,-1) \in B_{S_{1,2,3}}$ se hace:

$$x_1x^{\gamma_1}\boldsymbol{h_1} - x^{\gamma_3}\boldsymbol{h_3} = (2x_1-1)\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{h_4}.$$

Como $\boldsymbol{h_4} \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$ con $G' = \{\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2},\boldsymbol{h_3},\boldsymbol{h_4},\boldsymbol{h_5}\}$, no se adiciona un nuevo vector a G'.

Para $(0,-1,2) \in B_{S_{1,2,3}}$ se hace:

$$-x^{\gamma_2}\boldsymbol{h_2} + 2x^{\gamma_3}\boldsymbol{h_3} = -x_2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{p}'.$$

Como $\boldsymbol{p}' \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$, no se adiciona un nuevo vector a G'.

Paso 2: Como $G = \{\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2},\boldsymbol{h_3}\} \neq G' = \{\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2},\boldsymbol{h_3},\boldsymbol{h_4},\boldsymbol{h_5}\}$, se hace $D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_4, S_5, S_{1,4}, S_{1,5}, S_{2,4}, S_{2,5}, S_{3,4}, S_{3,5}, S_{4,5}, S_{1,2,4}, S_{1,2,5}, S_{1,3,4}, S_{1,3,5}, S_{1,4,5}, S_{2,3,4}, S_{2,3,5}, S_{2,4,5}, S_{3,4,5}, S_{1,2,3,4}, S_{1,2,3,5}, S_{1,2,4,5}, S_{1,3,4,5}, S_{2,3,4,5}, S_{1,2,3,4,5}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, los cuales son S_4, S_5 y $S_{4,5}$, se halla B_S:

- Para S_4 y S_5 no se adicionan nuevos vectores a G'.

- Para $S_{4,5}$ se halla $B_{S_{4,5}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} \quad \sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5}]$$

donde $\beta_4 = \exp(lm(\boldsymbol{h_4})) = (0,0)$ y $\beta_5 = \exp(lm(\boldsymbol{h_5})) = (1,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{4,5}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_4}), lm(\boldsymbol{h_5})\} = m.c.m.\{\boldsymbol{e_2}, x_2\boldsymbol{e_2}\} = x_2\boldsymbol{e_2}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5}}}) = (1,0)$; $\gamma_4 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5}}}) - \beta_4 = (1,$

0) y $\gamma_5 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5}}}) - \beta_5 = (0,\, 0)$; $x^{\gamma_4}x^{\beta_4} = x_2$, luego $c_{\gamma_4,\beta_4} = 1$, y $x^{\gamma_5}x^{\beta_5} = x_2$, luego $c_{\gamma_5,\beta_5} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} = \sigma_2\sigma_3^0(2x_1 - 1) = 4x_1 - 1$ y $\sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} = \sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1) = 2x_1$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[4x_1 - 1 \;\; 2x_1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(4x_1 - 1) + b_2(2x_1) = 0\}$ y $B_{S_{4,5}} = \{(x_1, -2x_1 + \frac{1}{2})\}$. Ahora para $(x_1, -2x_1 + \frac{1}{2}) \in B_{S_{4,5}}$ se hace:

$$\begin{aligned} x_1x^{\gamma_4}\boldsymbol{h_4} + \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)x^{\gamma_5}\boldsymbol{h_5} &= x_1x_2(2x_1 - 1)\boldsymbol{e_2} + \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)(2x_1x_2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_2}) \\ &= \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{q} \end{aligned}$$

con $lm(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{q}) = -2x_1 + \frac{1}{2}$.

A continuación se encontrará $\boldsymbol{r}$ reducido con respecto a $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}\}$, tal que $\boldsymbol{q} \xrightarrow{G'}_+ \boldsymbol{r}$:

- $\star$ Se inicia con $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{q}, q_1 := 0, q_2 := 0, q_3 := 0, q_4 := 0, q_5 := 0$. Como $lm(\boldsymbol{h_4})|lm(\boldsymbol{q})$ se calcula $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tal que $\alpha + exp(lm(\boldsymbol{h_4})) = exp(lm(\boldsymbol{r}))$: $x^\alpha lm(\boldsymbol{h_4}) = lm(\boldsymbol{r})$ luego $(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2})\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, por tanto $x^\alpha = 1$.
- $\star$ Ahora se calcula $c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}}$: $x^\alpha x^{exp(lm(\boldsymbol{h_4}))} = 1$, por tanto $c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}} = 1$.
- $\star$ A continuación se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} lc(\boldsymbol{r}) = -2x_1 + \frac{1}{2} &= r_4\sigma^\alpha(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\alpha,\boldsymbol{h_4}} \\ &= r_4\sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1 - 1) \\ &= r_4(2x_1 - 1). \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{Q}[x_1]$, por tanto, $\boldsymbol{r}$ es reducido con respecto a G'. Entonces se hace $G' \cup \{\boldsymbol{h_6}\}$ donde $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{q} := \boldsymbol{h_6}$, es decir, $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$.

Paso 3: Como $G = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}\} \neq G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$, se hace $D := \mathcal{P}(G') - \mathcal{P}(G)$, es decir $D := \{S_6, S_{1,6}, S_{2,6}, S_{3,6}, S_{4,6}, S_{5,6}, S_{1,2,6}, S_{1,3,6}, S_{1,4,6}, S_{1,5,6}, S_{2,3,6}, S_{2,4,6}, S_{2,5,6}, S_{3,4,6}, S_{3,5,6}, S_{4,5,6}, S_{1,2,3,6}, S_{1,2,4,6}, S_{1,2,5,6}, S_{1,3,4,6}, S_{1,3,5,6}, S_{1,4,5,6}, S_{2,3,4,6}, S_{2,3,5,6}, S_{2,4,5,6}, S_{3,4,5,6}, S_{1,2,3,4,6}, S_{1,2,3,5,6}, S_{1,2,4,5,6}, S_{1,3,4,5,6}, S_{2,3,4,5,6}, S_{1,2,3,4,5,6}\}$.

Ahora se hace $G = G'$, y para cada $S \in D$, tal que $\boldsymbol{X_S} \neq 0$, los cuales son $S_6, S_{4,6}, S_{5,6}$ y $S_{4,5,6}$, se halla B_S:

- Para S_6 no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para $S_{4,6}$ se halla $B_{S_{4,6}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} \quad \sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6}]$$

donde $\beta_4 = \exp(lm(\boldsymbol{h_4})) = (0,0)$ y $\beta_6 = \exp(lm(\boldsymbol{h_6})) = (0,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{4,6}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_4}), lm(\boldsymbol{h_6})\} = \boldsymbol{e_2}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{4,6}}}) = (0,0)$; $\gamma_4 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,6}}}) - \beta_4 = (0,\ 0)$ y $\gamma_6 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,6}}}) - \beta_6 = (0,\ 0)$; $x^{\gamma_4}x^{\beta_4} = 1$, luego $c_{\gamma_4,\beta_4} = 1$, y $x^{\gamma_6}x^{\beta_6} = 1$, luego $c_{\gamma_6,\beta_6} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} = \sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1 - 1) = 2x_1 - 1$ y $\sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6} = \sigma_2^0\sigma_3^0(-2x_1 + \frac{1}{2}) = -2x_1 + \frac{1}{2}$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[2x_1-1 \quad -2x_1+\frac{1}{2}] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(2x_1-1)+b_2(-2x_1+\frac{1}{2}) = 0\}$ y $B_{S_{4,6}} = \{(2x_1 - \frac{1}{2}, 2x_1 - 1)\}$. Ahora para $(2x_1 - \frac{1}{2}, 2x_1 - 1) \in B_{S_{4,6}}$ se hace:

$$\left(2x_1 - \frac{1}{2}\right) x^{\gamma_4}\boldsymbol{h_4} + (2x_1-1)x^{\gamma_6}\boldsymbol{h_6} = \left(2x_1 - \frac{1}{2}\right)(2x_1-1)\boldsymbol{e_2} + (2x_1-1)\left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{0}$$

entonces no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para $S_{5,6}$ se halla $B_{S_{5,6}}$, un sistema de generadores de

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} \quad \sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6}]$$

donde $\beta_5 = \exp(lm(\boldsymbol{h_5})) = (1,0)$ y $\beta_6 = \exp(lm(\boldsymbol{h_6})) = (0,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{5,6}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_5}), lm(\boldsymbol{h_6})\} = x_2\boldsymbol{e_2}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{5,6}}}) = (1,0)$; $\gamma_5 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{5,6}}}) - \beta_5 = (0,\ 0)$ y $\gamma_6 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,6}}}) - \beta_6 = (1,\ 0)$; $x^{\gamma_5}x^{\beta_5} = x_2$, luego $c_{\gamma_5,\beta_5} = 1$, y $x^{\gamma_6}x^{\beta_6} = x_2$, luego $c_{\gamma_6,\beta_6} = 1$. Entonces $\sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} = \sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1) = 2x_1$ y $\sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6} = \sigma_2\sigma_3^0(-2x_1 + \frac{1}{2}) = -4x_1 + \frac{1}{2}$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[2x_1 \quad -4x_1 + \frac{1}{2}] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{Q}[x_1]^2 \mid b_1(2x_1) + b_2(-4x_1 + \frac{1}{2}) = 0\}$ y $B_{S_{5,6}} = \{(2x_1 - \frac{1}{4}, x_1)\}$. Ahora para $(2x_1 - \frac{1}{4}, x_1) \in B_{S_{5,6}}$ se hace:

$$\begin{aligned}\left(2x_1 - \frac{1}{4}\right) x^{\gamma_5}\boldsymbol{h_5} + x_1x^{\gamma_6}\boldsymbol{h_6} &= \left(2x_1 - \frac{1}{4}\right)(2x_1x_2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_2}) + x_1x_2\left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2} \\ &= 2x_1\boldsymbol{e_2} - \frac{1}{4}\boldsymbol{e_2} = \left(2x_1 - \frac{1}{4}\right)\boldsymbol{e_2} := \boldsymbol{q'}\end{aligned}$$

con $lm(\boldsymbol{q'}) = \boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{q'}) = 2x_1 - \frac{1}{4}$.

A continuación se encontrará $\boldsymbol{r'}$ reducido con respecto a $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$, tal que $\boldsymbol{q'} \xrightarrow{G'}_+ \boldsymbol{r'}$:

- ⋆ Se inicia con $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{q'}, q_1 := 0, q_2 := 0, q_3 := 0, q_4 := 0, q_5 := 0, q_6 := 0$. Como $lm(\boldsymbol{h_4})|lm(\boldsymbol{q'})$ y $lm(\boldsymbol{h_6})|lm(\boldsymbol{q'})$, se calcula para $j = 4, 6$, $\alpha_j \in \mathbb{N}^2$ tal que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{h_j})) = exp(lm(\boldsymbol{r'}))$: $x_4^{\alpha} lm(\boldsymbol{h_4}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{41}} x_3^{\alpha_{42}})\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{41} = 0$, $\alpha_{42} = 0$, por tanto $x_4^{\alpha} = 1$. Y $x_6^{\alpha} lm(\boldsymbol{h_6}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{61}} x_3^{\alpha_{62}})\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{61} = 0$, $\alpha_{62} = 0$, por tanto $x_6^{\alpha} = 1$.

- ⋆ Ahora se calcula $c_{\alpha_j, \boldsymbol{h_j}}$: $x_4^{\alpha} x^{exp(lm(\boldsymbol{h_4}))} = 1$, por tanto $c_{\alpha_4, \boldsymbol{h_4}} = 1$. Y $x_6^{\alpha} x^{exp(lm(\boldsymbol{h_6}))} = 1$, por tanto $c_{\alpha_6, \boldsymbol{h_6}} = 1$.

- ⋆ A continuación se resuelve la ecuación

$$
\begin{aligned}
lc(\boldsymbol{r'}) = 2x_1 - \frac{1}{4} &= r_4 \sigma^{\alpha_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\alpha_4, \boldsymbol{h_4}} + r_6 \sigma^{\alpha_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\alpha_6, \boldsymbol{h_6}} \\
&= r_4 \sigma_2^0 \sigma_3^0 (2x_1 - 1) + r_6 \sigma_2^0 \sigma_3^0 \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= r_4 (2x_1 - 1) + r_6 \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

  luego $r_4 = -\frac{1}{2}$ y $r_6 = -\frac{3}{2}$.

- ⋆ Luego se hace $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{r'} - (r_4 x^{\alpha_4} \boldsymbol{h_4} + r_6 x^{\alpha_6} \boldsymbol{h_6})$, esto es,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r'} &:= \boldsymbol{r'} - \left(-\frac{1}{2}(2x_1 - 1)\boldsymbol{e_2} - \frac{3}{2}\left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2}\right) \\
&= \boldsymbol{r'} - \left(2x_1 - \frac{1}{4}\right)\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

Entonces $\boldsymbol{q'} \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$, por tanto no se adiciona un nuevo vector a G'.

- Para $S_{4,5,6}$ se halla $B_{S_{4,5,6}}$, un sistema de generadores de

$$
Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} \quad \sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} \quad \sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6}]
$$

donde $\beta_4 = \exp(lm(\boldsymbol{h_4})) = (0,0)$, $\beta_5 = \exp(lm(\boldsymbol{h_5})) = (1,0)$ y $\beta_6 = \exp(lm(\boldsymbol{h_6})) = (0,0)$; $\boldsymbol{X_{S_{4,5,6}}} = m.c.m.\{lm(\boldsymbol{h_4}), lm(\boldsymbol{h_5}), lm(\boldsymbol{h_6})\} = x_2\boldsymbol{e_2}$; $\exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5,6}}}) = (1,0)$; $\gamma_4 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5,6}}}) - \beta_4 = (1,0)$, $\gamma_5 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5,6}}}) - \beta_5 = (0,0)$ y $\gamma_6 = \exp(\boldsymbol{X_{S_{4,5,6}}}) - \beta_6 = (1,0)$; $x^{\gamma_4} x^{\beta_4} = x_2$, luego $c_{\gamma_4,\beta_4} = 1$, $x^{\gamma_5} x^{\beta_5} = x_2$, luego $c_{\gamma_5,\beta_5} = 1$, y $x^{\gamma_6} x^{\beta_6} = x_2$, luego $c_{\gamma_6,\beta_6} = 1$.

Entonces $\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} = \sigma_2\sigma_3^0(2x_1-1) = 4x_1-1$, $\sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} = \sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1) = 2x_1$ y $\sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6} = \sigma_2\sigma_3^0(-2x_1+\frac{1}{2}) = -4x_1+\frac{1}{2}$.

Por tanto $Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[4x_1-1 \quad 2x_1 \quad -4x_1+\frac{1}{2}] = \{(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{Q}[x_1]^3 \mid b_1(4x_1-1) + b_2(2x_1) + b_3(-4x_1+\frac{1}{2}) = 0\}$ y $B_{S_{4,5,6}} = \{(0, 2x_1-\frac{1}{4}, x_1), (x_1, -2x_1+\frac{1}{2}, 0)\}$. Ahora para $(0, 2x_1-\frac{1}{4}, x_1) \in B_{S_{4,5,6}}$ se hace:

$$\begin{aligned}\left(2x_1-\frac{1}{4}\right)x^{\gamma_5}\boldsymbol{h_5} + x_1x^{\gamma_6}\boldsymbol{h_6} &= \left(2x_1-\frac{1}{4}\right)(2x_1x_2\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_2}) + x_1x_2\left(-2x_1+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2}\\ &= \left(2x_1-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{q'}.\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{q'} \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$, con $G' = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$, no se adiciona un nuevo vector a G'.

Para $(x_1, -2x_1+\frac{1}{2}, 0) \in B_{S_{4,5,6}}$ se hace:

$$x_1x^{\gamma_4}\boldsymbol{h_4} + \left(-2x_1+\frac{1}{2}\right)x^{\gamma_5}\boldsymbol{h_5} = x_1x_2(2x_1-1)\boldsymbol{e_2} + \left(-2x_1+\frac{1}{2}\right)(2x_1x_2\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{h_6}.$$

Como $\boldsymbol{h_6} \in G'$, $\boldsymbol{h_6} \xrightarrow{G'} \boldsymbol{0}$, entonces no se adiciona un nuevo vector a G'. Por tanto $G = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$ es una base de Gröbner para $\langle \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\rangle$.

2. Hallar $Syz(L_G)$, para esto es suficiente encontrar un conjunto de generadores de sicigias homogéneas, donde

$$\begin{aligned}L_G := &\left[lt(\boldsymbol{h_1}) \quad lt(\boldsymbol{h_2}) \quad lt(\boldsymbol{h_3}) \quad lt(\boldsymbol{h_4}) \quad lt(\boldsymbol{h_5}) \quad lt(\boldsymbol{h_6})\right]\\ = &\left[\boldsymbol{e_1} \quad x_1\boldsymbol{e_1} \quad x_1x_2\boldsymbol{e_1} \quad (2x_1-1)\boldsymbol{e_2} \quad 2x_1x_2\boldsymbol{e_2} \quad \left(-2x_1+\tfrac{1}{2}\right)\boldsymbol{e_2}\right] \in M_{2\times 6}(A)\end{aligned}$$

Se inicia seleccionando los subconjuntos J de $\{1,2,3,4,5,6\}$ que son saturados con respecto a $\{\boldsymbol{e_1}, x_2\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, x_2\boldsymbol{e_2}\}$ tales que $\boldsymbol{X_J} \neq 0$: $J_{1,2} = \{1,2\}$, $J_{4,6} = \{4,6\}$, $J_{1,2,3} = \{1,2,3\}$, $J_{4,5,6} = \{4,5,6\}$.

- En el caso de $J_{1,2}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2}]$$

donde $\beta_1 = \exp(lm(\boldsymbol{h_1}))$, $\beta_2 = \exp(lm(\boldsymbol{h_2}))$, $\gamma_1 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_1$ y $\gamma_2 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2}}}) - \beta_2$, es $B^{J_{1,2}} = \{(x_1, -1)\}$, luego sólo se tiene un generador $\boldsymbol{b_1^{J_{1,2}}} = (b_{11}^{J_{1,2}}, b_{12}^{J_{1,2}}) = (x_1, -1)$ y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_1^{J_{1,2}}} &= b_{11}^{J_{1,2}} x^{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{e_1}} + b_{12}^{J_{1,2}} x^{\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{e_2}} \\
&= x_1 \tilde{\boldsymbol{e_1}} - \tilde{\boldsymbol{e_2}} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En el caso de $J_{4,6}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} \quad \sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6}]$$

donde $\beta_4 = \exp(lm(\boldsymbol{h_4}))$, $\beta_6 = \exp(lm(\boldsymbol{h_6}))$, $\gamma_4 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{4,6}}}) - \beta_4$ y $\gamma_6 = \exp(\boldsymbol{X_{J_{4,6}}}) - \beta_6$, es $B^{J_{4,6}} = \{(2x_1 - \frac{1}{2}, 2x_1 - 1)\}$, luego sólo se tiene un generador $\boldsymbol{b_1^{J_{4,6}}} = (b_{14}^{J_{4,6}}, b_{16}^{J_{4,6}}) = (2x_1 - \frac{1}{2}, 2x_1 - 1)$ y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_1^{J_{4,6}}} &= b_{14}^{J_{4,6}} x^{\gamma_4} \tilde{\boldsymbol{e_4}} + b_{16}^{J_{4,6}} x^{\gamma_6} \tilde{\boldsymbol{e_6}} \\
&= \left(2x_1 - \frac{1}{2}\right) \tilde{\boldsymbol{e_4}} + (2x_1 - 1)\tilde{\boldsymbol{e_6}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 - \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2x_1 - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En el caso de $J_{1,2,3}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_1}(lc(\boldsymbol{h_1}))c_{\gamma_1,\beta_1} \quad \sigma^{\gamma_2}(lc(\boldsymbol{h_2}))c_{\gamma_2,\beta_2} \quad \sigma^{\gamma_3}(lc(\boldsymbol{h_3}))c_{\gamma_3,\beta_3}]$$

donde $\beta_i = \exp(lm(\boldsymbol{h_i}))$, $\gamma_i = \exp(\boldsymbol{X_{J_{1,2,3}}}) - \beta_i$ con $1 \leq i \leq 3$, es $B^{J_{1,2,3}} = \{(x_1, 0, -1), (0, -1, 2)\}$, es decir, se tienen dos generadores $\boldsymbol{b_1^{J_{1,2,3}}} = (b_{11}^{J_{1,2,3}}, b_{12}^{J_{1,2,3}}, b_{13}^{J_{1,2,3}}) = (x_1, 0, -1)$ y $\boldsymbol{b_2^{J_{1,2,3}}} = (b_{21}^{J_{1,2,3}}, b_{22}^{J_{1,2,3}}, b_{23}^{J_{1,2,3}}) = (0, -1, 2)$, por tanto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_1^{J_{1,2,3}}} &= b_{11}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{e_1}} + b_{12}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{e_2}} + b_{13}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_3} \tilde{\boldsymbol{e_3}} \\
&= x_1 x_2 \tilde{\boldsymbol{e_1}} - \tilde{\boldsymbol{e_3}} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_2^{J_{1,2,3}}} &= b_{21}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_1} \tilde{\boldsymbol{e_1}} + b_{22}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{e_2}} + b_{23}^{J_{1,2,3}} x^{\gamma_3} \tilde{\boldsymbol{e_3}} \\
&= -x_2 \tilde{\boldsymbol{e_2}} + 2\tilde{\boldsymbol{e_3}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En el caso de $J_{4,5,6}$, un sistema de generadores para

$$Syz_{\mathbb{Q}[x_1]}[\sigma^{\gamma_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\gamma_4,\beta_4} \quad \sigma^{\gamma_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\gamma_5,\beta_5} \quad \sigma^{\gamma_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\gamma_6,\beta_6}]$$

donde $\beta_i = \exp(lm(\boldsymbol{h_i}))$, $\gamma_i = \exp(\boldsymbol{X_{J_{4,5,6}}}) - \beta_i$ con $4 \leq i \leq 6$, es $B^{J_{4,5,6}} = \{(0, 2x_1 - \frac{1}{4}, x_1), (x_1, -2x_1 + \frac{1}{2}, 0)\}$, es decir, se tienen dos generadores $\boldsymbol{b_1^{J_{4,5,6}}} = (b_{14}^{J_{4,5,6}}, b_{15}^{J_{4,5,6}}, b_{16}^{J_{4,5,6}})$

$= (0, 2x_1 - \frac{1}{4}, x_1)$ y $\boldsymbol{b_2^{J_{4,5,6}}} = (b_{24}^{J_{4,5,6}}, b_{25}^{J_{4,5,6}}, b_{26}^{J_{4,5,6}}) = (x_1, -2x_1 + \frac{1}{2}, 0)$, por tanto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_1^{J_{4,5,6}}} &= b_{14}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_4} \tilde{\boldsymbol{e_4}} + b_{15}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_5} \tilde{\boldsymbol{e_5}} + b_{16}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_6} \tilde{\boldsymbol{e_6}} \\
&= \left(2x_1 - \frac{1}{4}\right) \tilde{\boldsymbol{e_5}} + x_1 x_2 \tilde{\boldsymbol{e_6}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 - \frac{1}{4} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_2^{J_{4,5,6}}} &= b_{24}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_4} \tilde{\boldsymbol{e_4}} + b_{25}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_5} \tilde{\boldsymbol{e_5}} + b_{26}^{J_{4,5,6}} x^{\gamma_6} \tilde{\boldsymbol{e_6}} \\
&= x_1 x_2 \tilde{\boldsymbol{e_4}} + \left(-2x_1 + \frac{1}{2}\right) \tilde{\boldsymbol{e_5}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 x_2 \\ -2x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
Syz(L_G) &= \langle \{ \boldsymbol{s_1^{J_{1,2}}}, \boldsymbol{s_1^{J_{4,6}}}, \boldsymbol{s_1^{J_{1,2,3}}}, \boldsymbol{s_2^{J_{1,2,3}}}, \boldsymbol{s_1^{J_{4,5,6}}}, \boldsymbol{s_2^{J_{4,5,6}}} \} \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 - \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2x_1 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_1 - \frac{1}{4} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 x_2 \\ -2x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

en notación matricial,

$$Syz(L_G) = Z(L_G) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & x_1x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 - \frac{1}{4} & -2x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & 2x_1 - 1 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Hallar $Syz(G)$. Se inicia encontrando la matriz P y para esto se aplica el algoritmo de división como se muestra a continuación:

$\boldsymbol{.}x_1\boldsymbol{h_1} - \boldsymbol{h_2} + 0\boldsymbol{h_3} + 0\boldsymbol{h_4} + 0\boldsymbol{h_5} + 0\boldsymbol{h_6} = p_{11}\boldsymbol{h_1} + p_{21}\boldsymbol{h_2} + p_{31}\boldsymbol{h_3} + p_{41}\boldsymbol{h_4} + p_{51}\boldsymbol{h_5} + p_{61}\boldsymbol{h_6}$, donde $0 = p_{11} = p_{21} = p_{31} = p_{51} = p_{61}$ y $p_{41} = 1$.

$\boldsymbol{.}0\boldsymbol{h_1} + 0\boldsymbol{h_2} + 0\boldsymbol{h_3} + (2x_1 - \frac{1}{2})\boldsymbol{h_4} + 0\boldsymbol{h_5} + (2x_1 - 1)\boldsymbol{h_6} = p_{12}\boldsymbol{h_1} + p_{22}\boldsymbol{h_2} + p_{32}\boldsymbol{h_3} + p_{42}\boldsymbol{h_4} + p_{52}\boldsymbol{h_5} + p_{62}\boldsymbol{h_6}$, como $(2x_1 - \frac{1}{2})\boldsymbol{h_4} + (2x_1 - 1)\boldsymbol{h_6} = \boldsymbol{0}$, entonces $p_{i2} = 0$ con $1 \leq i \leq 6$.

$\boldsymbol{.}(x_1x_2)\boldsymbol{h_1} + 0\boldsymbol{h_2} - \boldsymbol{h_3} + 0\boldsymbol{h_4} + 0\boldsymbol{h_5} + 0\boldsymbol{h_6} = p_{13}\boldsymbol{h_1} + p_{23}\boldsymbol{h_2} + p_{33}\boldsymbol{h_3} + p_{43}\boldsymbol{h_4} + p_{53}\boldsymbol{h_5} + p_{63}\boldsymbol{h_6}$, como $(x_1x_2)\boldsymbol{h_1} - \boldsymbol{h_3} = \boldsymbol{h_5}$, entonces $0 = p_{13} = p_{23} = p_{33} = p_{43} = p_{63}$ y $p_{53} = 1$.

$\boldsymbol{.}0\boldsymbol{h_1} - x_2\boldsymbol{h_2} + 2\boldsymbol{h_3} + 0\boldsymbol{h_4} + 0\boldsymbol{h_5} + 0\boldsymbol{h_6} = p_{14}\boldsymbol{h_1} + p_{24}\boldsymbol{h_2} + p_{34}\boldsymbol{h_3} + p_{44}\boldsymbol{h_4} + p_{54}\boldsymbol{h_5} + p_{64}\boldsymbol{h_6}$, como $-x_2\boldsymbol{h_2} + 2\boldsymbol{h_3} = -x_2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{p'}$ con $lm(\boldsymbol{p'}) = x_2\boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{p'}) = -1$, a continuación se mostrará que $\boldsymbol{p'} \xrightarrow{G} \boldsymbol{0}$, con $G = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$:

- ⋆ Se inicia con $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{p'}, q_1 := 0, q_2 := 0, q_3 := 0, q_4 := 0, q_5 := 0, q_6 := 0$. Como $lm(\boldsymbol{h_4})|lm(\boldsymbol{p'})$, $lm(\boldsymbol{h_5})|lm(\boldsymbol{p'})$ y $lm(\boldsymbol{h_6})|lm(\boldsymbol{p'})$, se calcula para $j = 4, 5, 6$, $\alpha_j \in \mathbb{N}^2$ tal que $\alpha_j + exp(lm(\boldsymbol{h_j})) = exp(lm(\boldsymbol{r'}))$: $x^{\alpha_4}lm(\boldsymbol{h_4}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{41}}x_3^{\alpha_{42}})\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{41} = 1$, $\alpha_{42} = 0$, por tanto $x^{\alpha_4} = x_2$. $x^{\alpha_5}lm(\boldsymbol{h_5}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{51}}x_3^{\alpha_{52}})x_2\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{51} = 0$, $\alpha_{52} = 0$, por tanto $x^{\alpha_5} = 1$. Y $x^{\alpha_6}lm(\boldsymbol{h_6}) = lm(\boldsymbol{r'})$ luego $(x_2^{\alpha_{61}}x_3^{\alpha_{62}})\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{e_2}$; entonces $\alpha_{61} = 1$, $\alpha_{62} = 0$, por tanto $x^{\alpha_6} = x_2$.
- ⋆ Ahora se calcula $c_{\alpha_j,\boldsymbol{h_j}}$: $x^{\alpha_4}x^{exp(lm(\boldsymbol{h_4}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha_4,\boldsymbol{h_4}} = 1$; $x^{\alpha_5}x^{exp(lm(\boldsymbol{h_5}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha_5,\boldsymbol{h_5}} = 1$ y $x^{\alpha_6}x^{exp(lm(\boldsymbol{h_6}))} = x_2$, por tanto $c_{\alpha_6,\boldsymbol{h_6}} = 1$.

⋆ A continuación se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned}lc(\boldsymbol{r'}) = -1 &= r_4\sigma^{\alpha_4}(lc(\boldsymbol{h_4}))c_{\alpha_4,\boldsymbol{h_4}} + r_5\sigma^{\alpha_5}(lc(\boldsymbol{h_5}))c_{\alpha_5,\boldsymbol{h_5}} + r_6\sigma^{\alpha_6}(lc(\boldsymbol{h_6}))c_{\alpha_6,\boldsymbol{h_6}}\\ &= r_4\sigma_2\sigma_3^0(2x_1-1) + r_5\sigma_2^0\sigma_3^0(2x_1) + r_6\sigma_2\sigma_3^0\left(-2x_1+\frac{1}{2}\right)\\ &= r_4(4x_1-1) + r_5(2x_1) + r_6\left(-4x_1+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

entonces $r_4 = 1$, $r_5 = -2$ y $r_6 = 0$.

⋆ Entonces $\boldsymbol{r'} := \boldsymbol{r'} - (r_4x^{\alpha_4}\boldsymbol{h_4} + r_5x^{\alpha_5}\boldsymbol{h_5} + r_6x^{\alpha_6}\boldsymbol{h_6}) = \boldsymbol{0}$ y $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, $q_4 := q_4 + r_4x^{\alpha_4} = x_2$, $q_5 := q_5 + r_5x^{\alpha_5} = -2$, $q_6 := q_6 + r_6x^{\alpha_6} = 0$. Luego $\boldsymbol{p'} = x_2\boldsymbol{h_4} - 2\boldsymbol{h_5}$ con $lm(\boldsymbol{p'}) = \text{máx}\{lm(lm(q_i)lm(\boldsymbol{h_i}))\}_{i=1}^{6}$.

Por tanto $0 = p_{14} = p_{24} = p_{34} = p_{64}$, $p_{44} = x_2$ y $p_{54} = -2$.

.$0\boldsymbol{h_1} + 0\boldsymbol{h_2} + 0\boldsymbol{h_3} + 0\boldsymbol{h_4} + (2x_1 - \frac{1}{4})\boldsymbol{h_5} + (x_1x_2)\boldsymbol{h_6} = p_{15}\boldsymbol{h_1} + p_{25}\boldsymbol{h_2} + p_{35}\boldsymbol{h_3} + p_{45}\boldsymbol{h_4} + p_{55}\boldsymbol{h_5} + p_{65}\boldsymbol{h_6}$, como $(2x_1 - \frac{1}{4})\boldsymbol{h_5} + (x_1x_2)\boldsymbol{h_6} = (2x_1 - \frac{1}{4})\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{q'}$ con $lm(\boldsymbol{q'}) = \boldsymbol{e_2}$ y $lc(\boldsymbol{q'}) = 2x_1 - \frac{1}{4}$, según el algoritmo de división (incluído en el cálculo de la base de Gröbner), $\boldsymbol{q'} = q_1\boldsymbol{h_1} + q_2\boldsymbol{h_2} + q_3\boldsymbol{h_3} + q_4\boldsymbol{h_4} + q_5\boldsymbol{h_5} + q_6\boldsymbol{h_6}$ con $q_1 = q_2 = q_3 = q_5 = 0$, $q_4 = -\frac{1}{2}$ y $q_6 = -\frac{3}{2}$. Por tanto, $p_{45} = -\frac{1}{2}$, $p_{65} = -\frac{3}{2}$ y $0 = p_{15} = p_{25} = p_{35} = p_{55}$.

.$0\boldsymbol{h_1} + 0\boldsymbol{h_2} + 0\boldsymbol{h_3} + (x_1x_2)\boldsymbol{h_4} + (-2x_1 + \frac{1}{2})\boldsymbol{h_5} + 0\boldsymbol{h_6} = p_{16}\boldsymbol{h_1} + p_{26}\boldsymbol{h_2} + p_{36}\boldsymbol{h_3} + p_{46}\boldsymbol{h_4} + p_{56}\boldsymbol{h_5} + p_{66}\boldsymbol{h_6}$, como $(x_1x_2)\boldsymbol{h_4} + (-2x_1 + \frac{1}{2})\boldsymbol{h_5} = \boldsymbol{h_6}$, entonces $p_{16} = p_{26} = p_{36} = p_{46} = p_{56} = 0$ y $p_{66} = 1$.

De acuerdo con lo anterior, la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x_2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$Z(G) = Z(L_G) - P = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2x_1 - \frac{1}{2} & 0 & -x_2 & \frac{1}{2} & x_1x_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2x_1 - \frac{1}{4} & -2x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & 2x_1 - 1 & 0 & 0 & x_1x_2 + \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Hallar $Syz(H)$: Recordando que $G = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$ es una base de Gröbner para $\langle \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3} \rangle$, se aplica el algoritmo de división para obtener:

$\boldsymbol{h_1} = q_{11}\boldsymbol{h_1} + q_{21}\boldsymbol{h_2} + q_{31}\boldsymbol{h_3} + q_{41}\boldsymbol{h_4} + q_{51}\boldsymbol{h_5} + q_{61}\boldsymbol{h_6}$ con $q_{11} = 1$ y $q_{i1} = 0$, $2 \leq i \leq 6$.

$\boldsymbol{h_2} = q_{12}\boldsymbol{h_1} + q_{22}\boldsymbol{h_2} + q_{32}\boldsymbol{h_3} + q_{42}\boldsymbol{h_4} + q_{52}\boldsymbol{h_5} + q_{62}\boldsymbol{h_6}$ con $q_{22} = 1$ y $q_{i2} = 0$, $1 \leq i \leq 6$, $i \neq 2$.

$\boldsymbol{h_3} = q_{13}\boldsymbol{h_1} + q_{23}\boldsymbol{h_2} + q_{33}\boldsymbol{h_3} + q_{43}\boldsymbol{h_4} + q_{53}\boldsymbol{h_5} + q_{63}\boldsymbol{h_6}$ con $q_{33} = 1$ y $q_{i3} = 0$, $1 \leq i \leq 6$, $i \neq 3$.

Entonces,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Del algoritmo para encontrar la base de Gröbner G, se obtiene que cada elemento de ésta puede ser expresado como una A-combinación lineal de columnas de H:

$\boldsymbol{h_1} = r_{11}\boldsymbol{h_1} + r_{21}\boldsymbol{h_2} + r_{31}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{11} = 1$ y $r_{i1} = 0$, $i = 2, 3$.

$\boldsymbol{h_2} = r_{12}\boldsymbol{h_1} + r_{22}\boldsymbol{h_2} + r_{32}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{22} = 1$ y $r_{i2} = 0$, $i = 1, 3$.

$\boldsymbol{h_3} = r_{13}\boldsymbol{h_1} + r_{23}\boldsymbol{h_2} + r_{33}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{33} = 1$ y $r_{i3} = 0$, $i = 1, 2$.

$\boldsymbol{h_4} = r_{14}\boldsymbol{h_1} + r_{24}\boldsymbol{h_2} + r_{34}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{14} = x_1$, $r_{24} = -1$ y $r_{34} = 0$.

$\boldsymbol{h_5} = r_{15}\boldsymbol{h_1} + r_{25}\boldsymbol{h_2} + r_{35}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{15} = x_1x_2$, $r_{25} = 0$ y $r_{35} = -1$.

$\boldsymbol{h_6} = r_{16}\boldsymbol{h_1} + r_{26}\boldsymbol{h_2} + r_{36}\boldsymbol{h_3}$ con $r_{16} = \frac{1}{2}x_1x_2$, $r_{26} = -x_1x_2$ y $r_{36} = 2x_1 - \frac{1}{2}$.

Por tanto,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_1x_2 & \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -x_1x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2x_1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ahora se hace $Syz(H) = \left[(Z(G)^T R^T)^T \quad I_3 - (Q^T R^T)^T \right]$, esto es,

$$Z(G)^T R^T$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - \frac{1}{2} & 0 & 2x_1 - 1 \\ x_1x_2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -x_2 & 2 & -x_2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2x_1 - \frac{1}{4} & x_1x_2 + \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x_1x_2 & -2x_1 + \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & -1 & 0 \\ x_1x_2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}x_1x_2 & -x_1x_2 & 2x_1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 & -2x_1 + \frac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2 & 4x_1^2 - 3x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1^2x_2^2 & -\frac{1}{2} - 2x_1^2x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 & 4x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego,

$$(Z(G)^T R^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1 + 2x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1^2x_2^2 & 0 \\ 0 & -2x_1 + \frac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - 2x_1^2x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 & 0 \\ 0 & 4x_1^2 - 3x_1 + \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1 - \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$Q^TR^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & -1 & 0 \\ x_1x_2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}x_1x_2 & -x_1x_2 & 2x_1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (Q^TR^T)^T,$$

entonces

$$I_3 - (Q^TR^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$Syz(H) = \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 \\ -2x_1 + \frac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2 \\ 4x_1^2 - 3x_1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + 2x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \\ -\frac{1}{2} - 2x_1^2x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 \\ 4x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

APÉNDICE B

Generadores de $Ker(\phi)$

En seguida se muestran los cálculos obviados en el capítulo 3 que verifican que los elementos obtenidos como generadores del $Ker(\phi)$ están en este conjunto (véase el ejemplo 3.3.1):

Sea $m = (2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2)\boldsymbol{f}_1 + (-2x_1 + \frac{1}{2} - 2x_1^2x_2 + x_1x_2)\boldsymbol{f}_2$, $m \in Ker(\phi)$ pues:

$$
\begin{aligned}
&(2x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_1 + x_1^2x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2)(\boldsymbol{g}_1 + 2\boldsymbol{g}_2)\\
&= 2x_1^2((2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (8x_1^2+2x_1)x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\qquad -\tfrac{1}{2}x_1((2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (8x_1^2+2x_1)x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\qquad +x_1^2x_2((2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (8x_1^2+2x_1)x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\qquad -\tfrac{1}{2}x_1x_2((2x_1+1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (8x_1^2+2x_1)x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&= (4x_1^3 + 2x_1^2)x_2^2\boldsymbol{e}_1 + 2x_1^2x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (16x_1^4 + 4x_1^3)x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 4x_1^3x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\qquad +(-x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_1)x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + (-4x_1^3 - x_1^2)x_2^3\boldsymbol{e}_1 - x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\qquad +2x_1^2x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 + 8x_1^2x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\qquad +2x_1^2x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 2x_1^2x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 - x_1x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\qquad -\tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 - 4x_1x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - x_1x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - x_1x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&= 4x_1^3x_2^2\boldsymbol{e}_1 + 2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 + 2x_1^2x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + 16x_1^4x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 4x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1 + 4x_1^3x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\qquad -x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 - 4x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1 - x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\qquad -x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 + 4x_1^3x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 + 32x_1^4x_2^4\boldsymbol{e}_1\\
&\qquad +4x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1 + 4x_1^3x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2 - 2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\qquad -16x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 2x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 2x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-2x_1+\tfrac{1}{2}-2x_1^2x_2+x_1x_2)(x_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)=\\
&=-2x_1(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad-2x_1^2x_2(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad+x_1x_2(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&=-4x_1^3x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2x_3\boldsymbol{e}_2-8x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\quad-2x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\quad+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2-4x_1^2x_2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2-8x_1^2x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\quad-2x_1^2x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+2x_1x_2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1\\
&\quad+x_1x_2x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&=-4x_1^3x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2x_3\boldsymbol{e}_2-8x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1-2x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1\\
&\quad+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad-16x_1^4x_2^3\boldsymbol{e}_1-4x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1-4x_1^3x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2-32x_1^4x_2^4\boldsymbol{e}_1-4x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1-4x_1^3x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+8x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+16x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\phi(m)=0$.

Sea $m'=(\frac{1}{2}x_1+2x_1^2x_2+\frac{1}{2}x_1x_2+x_1^2x_2^2)\boldsymbol{f}_1+(-\frac{1}{2}-2x_1^2x_2^2-\frac{3}{2}x_1x_2)\boldsymbol{f}_2$, luego $m'\in Ker(\phi)$ pues:

$$
\begin{aligned}
&(\tfrac{1}{2}x_1+2x_1^2x_2+\tfrac{1}{2}x_1x_2+x_1^2x_2^2)(\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_2)\\
&=\tfrac{1}{2}x_1(2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad+2x_1^2x_2(2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}x_1x_2(2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad+x_1^2x_2^2(2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_2x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&=x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+4x_1^2x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+16x_1^2x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+4x_1^2x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+4x_1^2x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+x_1x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+2x_1^2x_2^2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^2x_2^2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&=x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&\quad+2x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2+64x_1^4x_2^4\boldsymbol{e}_1+8x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1+8x_1^3x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2+2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+\tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+16x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1+2x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2+8x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2+128x_1^4x_2^5\boldsymbol{e}_1\\
&\quad+8x_1^3x_2^5\boldsymbol{e}_2+8x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-\tfrac{1}{2}-2x_1^2x_2^2-\tfrac{3}{2}x_1x_2)(x_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)\\
&=-\tfrac{1}{2}(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2x_1^2x_2^2(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + 4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
&-\tfrac{3}{2}x_1x_2(2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 + 4x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 + x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2)\\
= &-x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 - 2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&-4x_1^2x_2^2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 - 2x_1^2x_2^2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 - 2x_1^2x_2^2x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 - 8x_1^2x_2^2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1\\
&-2x_1^2x_2^2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - 2x_1^2x_2^2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 - 3x_1x_2x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{3}{2}x_1x_2x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1\\
&-\tfrac{3}{2}x_1x_2x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 - 6x_1x_2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{3}{2}x_1x_2x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{3}{2}x_1x_2x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
= &-x_1^2x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3\boldsymbol{e}_2 - 2x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^3\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2\\
&-64x_1^4x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 8x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 8x_1^3x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2 - 128x_1^4x_2^5\boldsymbol{e}_1 - 8x_1^3x_2^5\boldsymbol{e}_1 - 8x_1^3x_2^4x_3\boldsymbol{e}_2\\
&-12x_1^3x_2^3\boldsymbol{e}_1 - 3x_1^2x_2^3\boldsymbol{e}_1 - 3x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_2 - 24x_1^3x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 3x_1^2x_2^4\boldsymbol{e}_1 - 3x_1^2x_2^3x_3\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\phi(m') = 0$.

Bibliografía

[1] Adams, W. and Loustaunau, P. *An Introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1994.

[2] Apel, J. and Lassner, W. *An extension of Buchberger's Algorithm and calculations in enveloping field of Lie algebras*. Journal Symbolic Computation 6 (1988), 361-370.

[3] Bell, A. and Goodearl, K. *Uniform rank over differential operator rings and Poincaré-Birkhoff-Witt extensons*. Pacific Journal of Mathematics, 131(1), 1998, 13-37.

[4] Buchberger, B., *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*. Ph.D. Thesis, Inst. University of Innsbruck, Innsbruck, Austria, 1965.

[5] Bueso, J., Gómez-Torrecillas, J., and Lobillo, F., *Homological Computations in PBW Modules, Algebras and Representation Theory*, 4 (2001), 201-218.

[6] Cluzeau, T. and Quadrat, A. *Factoring and decomposing a class of linear functional systems*. Lin. Alg. And Its Appl., 428, 2008, 324-381.

[7] Chyzak, F. and Salvy, B. *Non-commutative Elimination in Ore Algebras Proves Multivariate Identities*. Journal Symbolic Computation 26 (1998), 187-227.

[8] Chyzak, F., Quadrat, A. and Robertz, D. *Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras*. AAECC (2005) 16: 319-376.

[9] Gallego, C. *Bases de Gröbner no Conmutativas en Extensiones de Poincaré-Birkhoff-Witt*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2009.

[10] Galligo, A. *Some algorithmic questions on ideals of differntial operators*. Lecture Notes in Computer Science, vol 204, 1985, 413-421.

[11] Kandri-Rody, A. and Weispfenning, V. *Non-commutative Gröbner bases in algebra of solvable type*. Journal Symbolic Computation, 9 (1990), 1-26.

[12] Levandovskyy, V. *Non-commutatve Computer Algebra for Polynomial Algebras: Gröbner Bases, Applications and Implementation*. Doctoral Thesis, Universität Kaiserslautern, 2005.

[13] Lezama, O. *Matrix and Gröbner Methods in Homological Algebra over Commutative Polynomial Rings*. To be published.

[14] Lezama, O. *Gröbner bases for modules over Noetherian polynomial commutative rings.* Georgian Mathematical Journal, 15, 2008, 121-137.

[15] Lezama, O. *Anillos dimensionales.* Boletín de Matemáticas, 19(3), 1985, 194-220.

[16] Lezama, O. and Gallego, C. *Gröbner bases for ideals of $\sigma - PBW$ extensions.* To appear in Communications in Algebra, 2011.

[17] Li H. *Noncommutative Gröbner bases and Filtered-Graded Transfer.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1975, Springer, 2002.

[18] McConnell, J. and Robson, J. *Noncommutative Noetherian Rings.* Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2000.

[19] Mora, T. *An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases.* Theor. Comp. Sci., 134 (1994) 131-173.

[20] Zhang, Y. *Algorithms for Noncommutative Differential Operators.* Ph.D Tesis, University of Western Ontairo, London, Ontairo, 2004.