RELAJACIÓN CINÉTICA DE LOS SISTEMAS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

SERGIO BELTRÁN CUBILLOS
Código: 830201

LEONARDO RENDÓN ARBELAEZ
Director

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Noviembre de 2009

Sergio Beltrán Cubillos
Cód. 830201

Leonardo Rendón Arbelaez
Director

TABLA DE CONTENIDOS

1 Objetivos

1.1 Objetivo general

Usar la técnica de compacidad compensada para probar existencia de soluciones entrópicas de los sistemas de leyes de conservación estrictamente hiperbólicos.

1.2 Objetivos específicos

- Estudiar los sistemas de leyes de conservación mediante la asociación de sistemas relajados.
- Adquirir un conocimiento básico de la técnica de compacidad compensada en el estudio de la ecuaciones diferenciales parciales.
- Usar la técnica de compacidad compensada para establecer la convergencia de soluciones de los sistemas relajados a soluciones de los sistemas de leyes de conservación.

2 Preliminares

En esta primera sección presentamos los conocimientos con los que debe contar un potencial lector de este escrito. También recogemos algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales que aplicaremos en el estudio de los sistemas relajados asociados a las leyes de conservación.

2.1 Distribuciones y espacios de Sobolev

Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^N$. Denotaremos $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = C_c^\infty(\mathcal{O})$ al conjunto de funciones reales ϕ de clase C^∞ con soporte compacto. Recordemos que el soporte $\text{Sop}(\phi)$ de una función $\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es la clausura topológica del conjunto $\{x \in \mathcal{O} : \phi(x) \neq 0\}$. A los elementos de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ los llamaremos funciones de prueba.

Una sucesión de funciones de prueba (ϕ_n) converge a ϕ en el sentido de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ si existe un compacto $K \subseteq \mathcal{O}$ tal que:

1. $\text{Sop}(\phi_n - \phi) \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todo multiíndice $\alpha = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k$ la sucesión de derivadas $(D^\alpha \phi_n)$ converge uniformemente en K a $D^\alpha \phi$.

Un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ es continuo si $T(\phi_n) \to T(\phi)$ siempre que $\phi_n \to \phi$ en el sentido de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. A estos funcionales también los llamamos distribuciones de Schwartz de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. La noción de convergencia de distribuciones está dada por la topología débil-estrella en la que $T_n \to T$ si $T_n(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Con esto el dual topológico $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ es un espacio vectorial topológico no normable pero metrizable.

Diremos que una función $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si para todo compacto $K \subseteq \mathcal{O}$ tenemos

$$\int_K |u(x)|\, dx < +\infty.$$

En este caso escribiremos $u \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$.

A cada $u \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$ le corresponde una distribución T_u dada por

$$T_u(\phi) = \int_{\text{Sop}(\phi)} u(x)\phi(x)\, dx, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

No toda distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ es de la forma T_u para algún $u \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$, tal es el caso de la delta de Dirac concentrada en cero definida de la siguiente manera

$$\delta(\phi) = \phi(0), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Si T es una distribución y α es un multiíndice, definimos la derivada distribucional de $D^\alpha T$ como la distribución

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Consideremos $u \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$. Si la derivada distribucional $D^\alpha T_u$ es de la forma T_{v_α} para alguna $v_\alpha \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$ diremos que v_α es la derivada débil o distribucional de u de índice α y escribiremos

$$v_\alpha = D^\alpha u.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \infty]$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\mathcal{O})$ como el conjunto de funciones de $L^p(\mathcal{O})$ cuyas derivadas débiles hasta de orden $|\alpha| = m$ están en $L^p(\mathcal{O})$, esto es,

$$W^{m,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) : D^\alpha u \in L^p(\mathcal{O}) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

En $W^{m,p}(\mathcal{O})$, para $p < \infty$, podemos definir dos normas equivalentes

$$\|u\|_{m,p,\mathcal{O}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\mathcal{O})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

o bien,

$$\|u\|_{m,p,\mathcal{O}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathcal{O})}.$$

Cuando no haya lugar a confusiones suprimimos el subíndice $\mathcal{O}$ y escribimos simplemente $\|u\|_{m,p}$. En el caso $p = \infty$ definimos

$$\|u\|_{m,\infty} = \text{máx}_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathcal{O})}.$$

Con esta normas $W^{m,p}(\mathcal{O})$ es un espacio de Banach reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable si $1 \leq p < \infty$.

Sabemos que $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subseteq W^{m,p}(\mathcal{O})$ para $1 \leq p < \infty$ por lo que tiene sentido hablar de la clausura de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ respecto a la topología inducida en $W^{m,p}(\mathcal{O})$ por $\|\cdot\|_{m,p}$. A este espacio lo denotaremos $W^{m,p}_0(\mathcal{O})$. De él sabemos que es un subespacio vectorial cerrado de $W^{m,p}(\mathcal{O})$. Así pues, $u \in W^{m,p}_0(\mathcal{O})$ si y sólo si existe una sucesión (u_n) en $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ tal que $u_n \to u$ en $W^{m,p}(\mathcal{O})$.

En el caso particular $p = 2$ escribiremos $H^m(\mathcal{O}) = W^{m,2}(\mathcal{O})$, $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$ y $H^m_0((\mathcal{O}) = W^{m,2}_0(\mathcal{O})$. Tenemos que $H^m(\mathcal{O})$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0$$

donde $(u, v)_0 = \int_{\mathcal{O}} u(x)v(x)\, dx$ es el producto interno de $L^2(\mathcal{O})$.

Denotaremos p' al exponente conjugado de p, es decir, $p' = 1$ si $p = \infty$, $p' = \infty$ si $p = 1$ y $p' = p/(p-1)$ en cualquier otro caso. La relación importante entre p y p' es que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si $1 < p < \infty$, denotaremos $W^{-m,p'}(\mathcal{O})$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\mathcal{O})$ dotado de la norma usual de los operadores, esto es, si $T \in W^{-m,p'}(\mathcal{O}) = (W_0^{m,p}(\mathcal{O}))'$ entonces

$$\|T\|_{-m,p'} = \sup\{|T(u)| : u \in W_0^{m,p}(\mathcal{O}), \|u\|_{m,p} = 1\}.$$

Cada $v \in L^{p'}(\mathcal{O})$ determina una distribución T_v definida por

$$T_v(u) = \int_X u(x)v(x)\,dx, \qquad u \in W_0^{m,p}(\mathcal{O})$$

que está bien definida gracias a la desigualdad de Hölder que nos dice

$$|T_v(u)| \leq \int_X |u(x)v(x)|\,dx \leq \|v\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq \|v\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}\|u\|_{W_0^{m,p}(\mathcal{O})}.$$

De aquí también deducimos $\|T_v\|_{-m,p'} \leq \|v\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}$. Así pues, podemos definir una norma en $L^{p'}(\mathcal{O})$ mediante la fórmula

$$\|v\|_{-m,p'} = \|T_v\|_{-m,p'}$$

con la cual tendremos $\|v\|_{-m,p'} \leq \|v\|_{L^{p'}}$.

El conjunto $V = \{T_v : v \in L^{p'}(\mathcal{O})\}$ es denso en $W^{-m,p'}(\mathcal{O})$ por lo que la compleción de $L^{p'}(\mathcal{O})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{-m,p'}$ es isometricamente isomorfo a $W^{-m,p'}(\mathcal{O})$. Por lo tanto, podemos considerar a $L^{p'}(\mathcal{O})$ denso en $W^{-m,p'}(\mathcal{O})$.

Particularizando todos estos resultados al caso $p = 2$ tenemos que $H^{-m}(\mathcal{O})$ es el espacio dual de $H_0^m(\mathcal{O})$ porque 2 es su propio exponente conjugado. Nos interesará primordialmente el espacio $H^{-1}(\mathcal{O})$ que según lo dicho es el dual de $H_0^1(\mathcal{O})$. En este caso las inclusiones

$$H_0^1(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O}) \to H^{-1}(\mathcal{O})$$

son densas y continuas.

Notemos que la norma de $W^{m,p}(\mathcal{O})$ no es necesariamente una norma en

$$W_{loc}^{m,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L_{loc}^p(\mathcal{O}) : D^\alpha u \in L_{loc}^p(\mathcal{O}) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}$$

porque una función puede estar en $L_{loc}^p(\mathcal{O})$ y no en $L^p(\mathcal{O})$. Aunque $W_{loc}^{m,p}(\mathcal{O})$ *no* es un espacio normado (ver [8], pág 140) sí tenemos una noción de convergencia: Decimos que $u_n \to u$ en $W_{loc}^{m,p}(\mathcal{O})$ si

$$u_n \to u \text{ en } W^{m,p}(U)$$

para todo abierto $U \subseteq \mathcal{O}$ tal que $\overline{U}$ es compacto y $\overline{U} \subseteq \mathcal{O}$.

Hacemos la aclaración porque necesitaremos trabajar con el espacio $H_{loc}^{-1}(\mathcal{O})$ que no deberá entenderse como el dual de un cierto espacio vectorial topológico por analogía a la definición de $H^{-1}(\mathcal{O})$. Para ser exactos $H_{loc}^{-1}(\mathcal{O})$ es el conjunto de funciones $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ tales que $\phi f \in H^{-1}(\mathcal{O})$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. (Ver [6])

Sabemos que los espacios $L^p(\Omega)$ son reflexivos, por tanto las sucesiones acotadas tienen subsucesiones débilmente convergentes gracias al teorema de Banach-Alaoglu. Bajo estas condiciones, si $p \in (1, \infty)$, el teorema de Radón-Riesz asegura que si f_n converge débilmente a f y $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ entonces $f_n \to f$ en L^p.

2.2 Compacidad compensada

Recordemos que un conjunto X contenido en un espacio métrico es precompacto si para cada $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito de X por conjuntos de diametro menor que ε.

Denotaremos por M_N al conjunto de matrices de tamaño $N \times N$. Si $A \in M_N$ entonces A_{ij} denotará la componente (i, j) de A.

Si u^ϵ es una función de $L^p(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ escribimos $u^\epsilon = (u_1^\epsilon, ..., u_N^\epsilon)$ donde $u_k^\epsilon \in L^p(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ es la $k-$ésima funcion componente de u^ϵ. Cuando digamos que (u^ϵ) es una sucesión entenderemos que existe una familia enumerable $\epsilon_1, \epsilon_2, ...$ de números positivos tales que $(u^\epsilon) = (u^{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Para nosostros será de ínterés el caso en que $\epsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Diremos que una sucesión (u^ϵ) en $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ converge debilmente a $u \in L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$, y escribimos $u^\epsilon \rightharpoonup u$, si

$$\int_{\mathcal{O}} u_k^{\epsilon_n}(x) v(x)\, dx \to \int_{\mathcal{O}} u_k(x) v(x)\, dx \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

para todo $k = 1, ..., N$ y todo $v \in L^2(\mathcal{O})$.

Teorema 1 (Lema del Divergente-Rotacional). *Sean (v^ϵ) y (u^ϵ) dos sucesiones acotadas en $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ tales que*

1. El conjunto $\{div\ v^\epsilon\}$ es precompacto en $H^{-1}(\mathcal{O})$,

2. El conjunto $\{rot\ u^\epsilon\}$ es precompacto en $H^{-1}(\mathcal{O}, M_N)$,

donde

$$(rot\ u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

para $i, j \in \{1, ..., N\}$.

Si $v^\epsilon \rightharpoonup v$ y $u^\epsilon \rightharpoonup u$ en $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ entonces

$$\langle v^\epsilon, u^\epsilon \rangle \to \langle v, u \rangle$$

en el sentido de las distribuciones. Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^N$.

La demostración detallada se encuentra en [4].

En este teorema tanto $\langle v^\epsilon, u^\epsilon \rangle$ como $\langle v, u \rangle$ son funciones de $L^2(\mathcal{O})$ luego la convergencia en el sentido de las distribuciones significa convergencia débil en $L^2(\mathcal{O})$, es decir,

$$\int_{\mathcal{O}} \langle v^\epsilon, u^\epsilon \rangle \phi\, dx \to \int_{\mathcal{O}} \langle v, u \rangle \phi, dx \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

para todo $\phi \in L^2(\mathcal{O})$.

Denotamos $C_0(\mathbb{R}^N)$ al espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ que tienden a cero en el infinito. Esto es, las funciones $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K de $\mathbb{R}^N$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$.

El espacio dual de $C_0(\mathbb{R}^N)$ se puede caracterizar como la colección $M(\mathcal{O})$ de medidas de Radón sobre $\mathcal{O}$. Tengamos presente que una medida μ sobre $\mathcal{O}$ es de Radón si está definida sobre la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathcal{O}$ y para cada Boreliano $E \subseteq \mathcal{O}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K y un abierto U tales que $K \subseteq E \subseteq U$ y $\mu(U - K) < \varepsilon$.

En este orden de ideas, si $T \in (C_0(\mathbb{R}^N))'$ entonces existe una medida de Radón μ_T sobre $\mathcal{O}$ tal que

$$T(f) = \int_{\mathcal{O}} f(x)\, d\mu_T(x)$$

además cada medida de Radón μ determina un funcional lineal continuo T que satisaface la igualdad anterior y la norma de μ en $M(\mathcal{O})$ se puede calcular como

$$\|\mu\|_{M(\mathcal{O})} = \sup\left\{ \left| \int_{\mathcal{O}} f\, d\mu \right| : f \in C_0(\mathbb{R}^N), \|f\|_\infty = 1 \right\}$$

Sabemos que $M(\mathcal{O})$ está inmerso compactamente en $W^{-1,p'}(\mathcal{O})$ para todo $p' \in [1, \frac{N}{N-1})$.

Con esto ya podemos enunciar un importante resultado debido a Murat que nos será de inmensa utilidad.

Teorema 2 (Lema de Murat). *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{-1,r}_{loc}(\mathcal{O})$ para algún $r \in (2, \infty]$. Si $f_k = g_k + h_k$, donde (g_k) es acotada en $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$ y (h_k) es acotada en $M(\mathcal{O})$, entonces (f_k) es precompacta en $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$.*

Para la demostración se puede consultar [4].

El siguiente es un resultado de vital importancia en el estudio que nos proponemos y aquí lo enunciamos en el único caso que nos interesa.

Teorema 3 (y Definición). *Sea K un compacto de $\mathbb{R}^N$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Sea (u^ϵ) una sucesión de funciones medibles, con $u^\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^N$, tal que $u^\epsilon(x) \in K$ p.c.t $x \in \Omega$. Entonces existe una subsucesión (u^{ϵ_k}) y una familia de medidas de probabilidad ν_x, $x \in \Omega$, sobre $\mathbb{R}^2$ con $Sop(\nu_x) \subseteq K$ tal que si f es una función contínua en $\mathbb{R}^N$ y*

$$\overline{f}(x) = \int_K f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$$

entonces

$$f(u^{\epsilon_k}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \overline{f} \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Decimos que $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ es una familia parametrizada de medidas de Young.

La prueba de este teorema se encuentra en [4] y la última parte que será la que más nos interesa está en [2].

Notemos que este teorema nos dice que si $u^{\epsilon_k} \to u$ p.c.t. $x \in \Omega$ entonces

$$\overline{f}(x) = \int_K f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) = f(u(x)),$$

o sea,

$$f(u^{\epsilon_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u) \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Esta es precisamente la pregunta que intenta resolver la compacidad compensada. Un método muy útil para resolver sistemas de ecuaciones del tipo

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

conocido como perturbación parabólica, consistía en asociar un nuevo sistema con un término viscoso para obtener

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}$$

y obtener soluciones de este último. Al hacer ε tender a 0 se esparaba que $u^\varepsilon \to u$ pero faltaba saber qué tipo de convergencia y en que espacio se tenía $f(u^\varepsilon) \to f(u)$. Vemos claramente que la respuesta es el teorema 3. Veremos que en el problema que nos planteamos esta también es la solución.

3 Las ecuaciones

Consideremos el sistema de leyes de conservación

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2_+ \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

donde $u \in \mathbb{R}^N$, es decir, buscamos soluciones $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^N$, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función de clase C^2 en un conjunto abierto convexo $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ y $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

A (1) lo llamamos el *sistema equilibrado.* Suponemos que la matriz jacobiana de f en cada $u \in \mathcal{O}$ es diagonalizable con N autovalores reales diferentes, o sea (1) es un sistema hiperbólico.

A la diferencial de f en un punto u de $\mathcal{O}$ la denotamos $df(u)$ y a su matriz jacobiana $\nabla f(u)$. Si $u \in \mathcal{O}$ entonces a los autovalores de $\nabla f(u)$ los denotamos $\lambda_1(u), ..., \lambda_N(u)$. Como los $\lambda_k(u)$ son diferentes existen N vectores linealmente independientes, a los que denotamos $r_1(u), ..., r_N(u)$, tales que

$$\nabla f(u) \cdot r_k(u) = \lambda_k(u) \cdot r_k(u).$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^N$ tiene una base formada por autovectores de $\nabla f(u)$ para cada $u \in \mathcal{O}$. También existen N vectores $l_k(u)$, $k = 1, ..., N$ linealmente independientes tales que

$$l_k(u)^T \cdot \nabla f(u) = \lambda_k(u) \cdot l_k(u)^T.$$

La relajación cinética de (1), o *sistema relajado* asociado a (1) es

$$\begin{cases} z^\epsilon_t + a(\xi) z^\epsilon_x = \frac{1}{\epsilon}(M_\xi(u^\epsilon(t,x)) - z^\epsilon), \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}^2_+ \times X \\ \\ u^\epsilon(t,x) = \int_X z^\epsilon(t,x,\xi)\, d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2_+ \\ \\ z^\epsilon(0,x,\xi) = z_0(x,\xi), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R} \times X \end{cases} \tag{2}$$

donde (X, Ω, μ) es un espacio de probabilidad dado, $z \in \mathbb{R}^N$, es decir que buscamos soluciones $z : \mathbb{R}^2_+ \times X \to \mathbb{R}^N$, $a : X \to \mathbb{R}$ es medible acotada, $M : \mathcal{O} \times X \to \mathbb{R}^N$ es de clase C^2 respecto a $u \in \mathcal{O}$ y medible acotada respecto a $\xi \in X$ y el dato inicial z_0 está en $L^\infty(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R}^N)$.

Observemos que para cada $\xi \in X$ la función

$$M : \mathcal{O} \times X \to \mathbb{R}^N$$

determina una función $M_\xi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^N : u \mapsto M_\xi(u) = M(u,\xi)$. Esta es la función que aparece en (2).

Será de vital importancia que M satisfaga ciertas condiciones de compatibilidad para que (2) sea un sistema que nos permita aproximar las soluciones de (1) cuando $\epsilon \to 0$:

Decimos que M es una función maxweliana (FM) en un conjunto cerrado $K \subseteq \mathcal{O}$ si satisface las siguientes condiciones:

(M1). $\int_X M(u,\xi)\, d\mu(\xi) = u$ para todo $u \in K$
(M2). $\int_X a(\xi) M(u,\xi)\, d\mu(\xi) = f(u)$ para todo $u \in K$
(M3). El espectro de $\nabla M_\xi(u)$ está en $(0,\infty)$ para todo $(u,\xi) \in K \times X$
(M4). $\nabla M_\xi(u)$ y $\nabla f(u)$ conmutan para todo $(u,\xi) \in K \times X$

En el caso que nos ocupa, el espectro de $\nabla M_\xi(u)$ es el conjunto de autovalores de la matriz jacobiana de $dM_\xi(u)$.

Ejemplo 1. Para $i = 1, ..., N$ consideramos el sistema

$$\partial_t z_i^\epsilon + a_i \partial_x z_i^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(M_i(u) - z_i).$$

El espacio de probabilidad será un espacio discreto con la medida de conteo normalizada. Las condiciones de la función maxweliana son

$$\sum_{i=1}^{N} M_i(u) = u$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i M_i(u) = f(u).$$

Si tomamos $N = 2$, $a_1 = -\lambda$ y $a_2 = \lambda$ entonces al definir

$$M_1(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{f(u)}{\lambda}\right)$$

$$M_2(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{f(u)}{\lambda}\right)$$

obtenemos un ejemplo de función maxweliana.

Recogemos ahora las definiciones de los conceptos que trataremos en el estudio de las ecuaciones que acabamos de enunciar.

Definición 1. *Una solución clásica* (*o simplemente, solución*) *de* (1) *es una función* $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^N$ *que satisface las siguientes condiciones*
1. $u(t,x) \in \mathcal{O}$ *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^2_+$
2. $u \in C^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R})$
3. $u(0,x) = u_0(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$
4. $u_t(t,x) + f(u(t,x))_x = 0$ *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^2_+$

Muchos sistemas de la forma (1) no poseen soluciones clásicas pues si suponemos la existencia de tales soluciones llegamos a concluir que ellas son discontinuas contradiendo la segunda condición de la definición 1. El ejemplo típico de esta situación es la siguiente ecuación:

Ejemplo 2. Ecuación de Burger.

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \\ \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $f(u) = \frac{u}{2}$ y el dato inicial $u_0(x)$ es una función en $L^\infty(\mathbb{R})$.

Tomemos

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \tag{4}$$

Supongamos que existe una solución clásica $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (3). Usemos el método de las curvas características, para esto, definamos $x(t)$ como la curva solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\,x}{d\,t}(t) = u(t, x(t)). \tag{5}$$

A lo largo de esta curva tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,x} = u_t + uu_x = 0.$$

Esto quiere decir que a lo largo de tales curvas la solución u es constante respecto al tiempo. Es decir, $u(t, x(t)) = u(0, x(0)) = u_0(x(0))$.

Por otro lado, $x'(t)$ resulta ser constante igual a $u(0, x(0))$ de donde concluimos que $x(t)$ es una recta cuya ecuación está dada por

$$x(t) = u_0(x(0))t + x(0).$$

Teniendo en cuenta el dato inicial (4) obtenemos:

Si $x(0) \leq 0$ entonces $x(t) = t + x(0)$.
Si $x(0) \in [0,1]$ entonces $x(t) = (1 - x(0))t + x(0)$.
Si $x(0) \geq 1$ entonces $x(t) = x(0)$.

Con esto conseguimos una solución de (3) pero no en todo el plano:

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq x, t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq t,\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

En la región restante las curvas características se cruzan y esto contradice la continuidad de la solución u.

Este ejemplo ilustra la necesidad de buscar un concepto de solución de (1) más débil que el que hasta ahora tenemos.

Definición 2. *Una solución débil de* (1) *es una función* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2_+, \mathcal{O})$ *tal que para toda* $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^N)$ *se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x \, dtdx + \int_{\mathbb{R}} u_0 \cdot \phi(0,x)dx = 0 \tag{6}$$

Aquí $C^1_c(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^N)$ *denota el conjunto de funciones* $\phi : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *contínuas, de clase* C^1 *en el abierto* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *y con soporte compacto.*

El concepto de solución dado por la definición 2 generaliza el de solución clásica en el sentido de que cualquier solución clásica satisaface la condición (6) y por tanto es una solución débil.

Teorema 4. *Toda solución clásica de* (1) *es una solución débil.*

Demostración. Supongamos que u es una solución de (1). Tomemos ϕ en $C^1_c(\mathbb{R}^2_+)$ y escojamos $r > 0$ tal que $\mathrm{Sop}(\phi) \subseteq B(0,r) \cap \mathbb{R}^2_+ =: M$.

Usando la hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned}
(u \cdot \phi)_t + (f(u) \cdot \phi)_x &= \left(\sum_{k=1}^n u_k \cdot \phi_k \right)_t + \left(\sum_{k=1}^n f_k(u) \cdot \phi_k \right)_x \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial t} \phi_k + \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(u)}{\partial x} \phi_k + \sum_{k=1}^n f_k(u) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \\
&= \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k(u) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \\
&= u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x
\end{aligned}$$

y esta identidad se cumple en todo $\mathbb{R}^2_+$.

Ahora bien, podemos usar el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2+}} u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x \, dxdt &= \int_M u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x \, dxdt \\
&= \int_M (f(u) \cdot \phi)_x - (-u \cdot \phi)_t \, dxdt \\
&= \int_{\partial M} -u \cdot \phi \, dx + f(u) \cdot \phi \, dt \\
&= -\int_{\partial M} u \cdot \phi \, dx - f(u) \cdot \phi \, dt
\end{aligned}$$

Parametrizando la frontera de M observamos que sobre el camino $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, tanto $u \cdot \phi$ como $f(u) \cdot \phi$ se anulan luego sólo es necesario integrar sobre la parte de ∂M que está sobre el eje real con lo que conseguimos

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial M} u \cdot \phi \, dx - f(u) \cdot \phi \, dt &= -\int_{-r}^{r} u(x,0) \cdot \phi(x,0) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} u_0(x) \cdot \phi(x,0) \, dx
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que en $(-\infty,-r)\cup(r,\infty)$ la función ϕ también se anula y u satisface la condición inicial $u(x,0)=u_0(x)$. Hemos probado que u es una solución débil. $\square$

En general, las soluciones débiles de un sistema de leyes de conservación no son únicas. Una manera de asegurar la unicidad de tales soluciones consiste en exigir que satisfagan ciertas condiciones adicionales.

Definición 3. *Consideremos el sistema equilibrado* (1) *para* $N=1$. *Decimos que una solución débil* u *de* (1) *satisface la condición de entropía si existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$u(t,x+y)-u(t,x)\leq C(1+\frac{1}{t})y$$

para casi todo $x,y\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}^+$ *con* $y>0$.

Como anotábamos antes, la importancia de la condición de entropía es que, bajo hipótesis adecuadas para f, asegura la unicidad de la solución débil que la satisface, veamos:

Teorema 5. *Supongamos que la función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de* (1) *es convexa. Entonces, existe una única solución débil de* (1) *que satisface la condición de entropía.*

Demostración. Siguiendo a [3] haremos la demostración en varios pasos:

1. Supongamos que u y v son dos soluciones de (1) que satisfacen la condición de entropía y llamemos $w=u-v$. Dada la suavidad de la función f podemos usar el teorema fundamental del cálculo para obtener en todo $(t,x)\in\mathbb{R}^2_+$ lo siguiente

$$\begin{aligned} f(u(t,x))-f(v(t,x)) &= \int_0^1 \frac{d}{dr}f(ru(t,x)+(1-r)v(t,x))\,dr \\ &= \int_0^1 f'(ru(t,x)+(1-r)v(t,x))\,dr[u(t,x)-v(t,x)] \end{aligned}$$

Llamemos $b(t,x)=\int_0^1 f'(ru(t,x)+(1-r)v(t,x))\,dr$ de modo que podemos escribir

$$f(u(t,x))-f(v(t,x))=b(t,x)w(t,x).$$

Gracias a la hipótesis y la relación (6), para toda función de prueba $\phi\in C^1_c(\mathbb{R}^2_+)$ tenemos que

$$0=\int_{R^2_+} w\cdot\phi_x+[f(u)-f(v)]\cdot\phi_x\,dxdt=\int_{R^2_+} w(\phi_t+b\phi_x)\,dxdt. \qquad (7)$$

2. Tomemos $\varepsilon>0$. La función definida para $x\in\mathbb{R}^2$ como

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases} k\varepsilon^{-2}\text{exp}\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right) & \text{si } |x|<\varepsilon \\ 0 & \text{si } |x|\geq\varepsilon \end{cases}$$

donde $k = \left(\int_{B(0,1)} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) dx\right)^{-1}$, es una función de clase C^∞ con soporte contenido en la bola $B(0,\varepsilon)$ con centro 0 y radio ε. Además,

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

A esta función la llamaremos en lo sucesivo el *suavizador* ρ_ε.

Tomemos $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ y $v^\varepsilon = \rho_\varepsilon * v$ donde $*$ denota el producto de convolución usual

$$u^\varepsilon(z_1) = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(z_2) u(z_1 - z_2)\, dz_2 \quad z_i \in \mathbb{R}^2.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder sabemos que $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$ y $\|v^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^\infty}$. Además es un hecho conocido que $u^\varepsilon \to u$ y $v^\varepsilon \to v$ en casi todo punto cuando $\varepsilon \to 0$.

Analizando los cocientes incrementales que definen la derivada paracial respecto a x de u obtenemos, por la condición de entropía, que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname*{Lím}_{h \to 0} \frac{u(t, x+h) - u(t,x)}{h} \leq C(1 + \frac{1}{t})$$

por lo cual

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \leq C(1 + \frac{1}{t}) \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x)\, dx = C(1 + \frac{1}{t}).$$

El mismo argumento prueba que $v_x^\varepsilon \leq C(1 + \frac{1}{t})$.

Ahora definamos $b_\varepsilon(t,x) = \int_0^1 f'(ru^\varepsilon(t,x) + (1-r)v^\varepsilon(t,x))\, dr$. Con esto la ecuación (7) se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{R_+^2} w(\phi_t + b\phi_x)\, dxdt \\ &= \int_{R_+^2} w(\phi_t + b^\varepsilon \phi_x)\, dxdt + \int_{R_+^2} w(b - b^\varepsilon)\phi_x\, dxdt \end{aligned}$$

3. Fijemos $T > 0$. para cualquier función de prueba $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^2)$ podemos resolver el problema

$$\begin{cases} z_t^\varepsilon + b_\varepsilon z_x^\varepsilon = \psi & \text{en } \mathbb{R} \times (0,T) \\ z(T,x) = 0 & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8}$$

por el método de las curvas características. Para tal fin tomamos $x \in \mathbb{R}$ y definimos x_ε como la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} x_\varepsilon'(s) = b_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) & \text{para } s \geq t \\ x_\varepsilon(t) = x \end{cases} \tag{9}$$

de donde obtenemos

$$z_t^\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) + b_\varepsilon z_x^\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) = \psi(s, x_\varepsilon(s))$$

o sea,

$$\nabla z^\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \cdot (1, b_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))) = \psi(s, x_\varepsilon(s))$$

que equivale a

$$\frac{d}{ds} z(s, x_\varepsilon(s)) = \psi(s, x_\varepsilon(s))$$

lo que nos da por integración la solución de (8)

$$z^\varepsilon(t, x) = -\int_t^T \psi(x_\varepsilon(s), s)\, ds$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ y todo $t \in [0, T]$. z^ε es la única solución de (8). Además z^ε es acotada y tiene soporte compacto porque ψ lo tiene.

4. En este paso probaremos que para todo $s > 0$ existe una constante $C_s > 0$ tal que $|z_x^\varepsilon| \le C_s$ en $(s, T) \times \mathbb{R}$.

Tomemos cualquier t que cumpla $0 < s \le t \le T$. Hagamos una estimativa para la derivada parcial $\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial x}(t, x)$. Para esto debemos tener en cuenta que f es de clase C^2 y es convexa por la hipótesis del teorema, luego $f''(\cdot) > 0$. Además sabemos que tanto u_x^ε como v_x^ε están acotadas por $C(1 + \frac{1}{t})$. Tenemos pues,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_\epsilon}{\partial x}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f'(ru^\varepsilon(t, x) + (1 - r)v^\varepsilon(t, x))\, dr \\
&= \int_0^1 f''(ru^\varepsilon(t, x) + (1 - r)v^\varepsilon(t, x))[ru_x^\varepsilon + (1 - r)v_x^\varepsilon]\, dr \\
&\le C(1 + \frac{1}{t}) \le C(1 + \frac{1}{s}) \\
&\le \frac{C}{s}
\end{aligned}$$

en el último paso hemos cambiado de constante C pero lo importante es que sigue siendo una constante positiva.

Derivando $z_t^\varepsilon + b_\varepsilon z_x^\varepsilon = \psi$ respecto a x obtenemos

$$z_{tx}^\varepsilon + b_\varepsilon z_{xx}^\varepsilon + \frac{\partial b_\varepsilon}{\partial x} z_x^\varepsilon = \psi_x.$$

Llamando $a(t, x) = e^{\lambda t} z_x^\varepsilon$, donde $\lambda = \frac{C}{s} + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
a_t + b_\varepsilon a_x &= \lambda a + e^{\lambda t} z_{xt}^\varepsilon + b_\varepsilon e^{\lambda t} z_{xx}^\varepsilon \\
&= \lambda a + e^{\lambda t}[z_{xt}^\varepsilon + b_\varepsilon z_{xx}^\varepsilon] \\
&= \lambda a + e^{\lambda t}\left[\psi_x - \frac{\partial b_\epsilon}{\partial x} \cdot z_x^\varepsilon\right] \\
&= \left[\lambda - \frac{\partial b_\epsilon}{\partial x}\right] a + e^{\lambda t} \psi_x
\end{aligned}$$

Como el soporte de z es compacto también lo es el de z_x y por tanto el de $a(t, x)$. Así pues, $a(t, x)$, que es claramente contínua por la definición, alcanza su punto máximo en un cierto $(t_0, x_0) \in [s, T] \times \mathbb{R}$. Si $t_0 = T$ entonces z_x es idénticamente nula. Si por el contrario $0 \leq t_0 < T$ entonces toda derivada direccional de a en (t_0, x_0) es negativa porque en cualquiera de estas direcciones a decrece. En particular la derivada parcial $a_t(t_0, x_0) \leq 0$ pero $a_x(t_0, x_0) = 0$.

Reemplazando (t_0, x_0) en la última igualdad obtenemos

$$[\lambda - \frac{\partial b_\varepsilon}{\partial x}(t_0, x_0)]a(t_0, x_0) + e^{\lambda t_0}\psi_x(t_0, x_0) \leq 0.$$

Ahora basta recordar que hemos acotado $\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial x}(t, x)$ por C/s y que por definición $\lambda = \frac{C}{s} + 1$, para obtener

$$a(t_0, x_0) \leq e^{\lambda t_0}\psi_x \leq e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}.$$

Exactamente el mismo argumento aplicado al punto (t_1, x_1) donde a alcanza su mínimo nos da

$$a(t_1, x_1) \geq -e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}.$$

Por lo tanto,

$$-e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty} \leq a(t, x) \leq e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}$$

lo que equivale a

$$|e^{\lambda t} z_x^\varepsilon| = |a(t, x)| \leq e^{\lambda T}\|\psi_x\|_{L^\infty}.$$

Esto nos da la desigualdad que queriamos $|z_x^\varepsilon| \leq C_s$ en $(s, T) \times \mathbb{R}$ para un C_s adecuado, a saber, $C_s = e^{\frac{C}{s}+1}\|\psi_x\|_{L^\infty}$.

Antes de enunciar el paso final notemos que $z_x^\varepsilon(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0, \tau]$ donde $\tau > 0$ es suficientemente pequeño. Esto es una inmediata consecuencia de que z_x tenga soporte compacto y sea acotada.

5. Ya estamos en posición de probar la afirmación final.

El paso anterior nos permite reemplazar en

$$0 = \int_{R_+^2} w(\phi_t + b^\varepsilon\phi_x)\, dxdt + \int_{R_+^2} w(b - b^\varepsilon)\phi_x\, dxdt$$

la ϕ por z con lo cual obtenemos

$$0 = \int_{R_+^2} w\psi\, dxdt + \int_{R_+^2} w(b - b^\varepsilon)z_x^\varepsilon\, dxdt$$

luego

$$\int_{R_+^2} w\psi\, dxdt = \int_{R_+^2} w(b^\varepsilon - b)z_x^\varepsilon\, dxdt.$$

Hemos trabajado con un T arbitrario y ahora escogemos uno adecuado para que la función z^ε se anule fuera de $[0, T] \times \mathbb{R}$. Esto es posible porque z^ε tiene soporte compacto. Con esto podemos evaluar la integral $\int_{R_+^2} w(b^\varepsilon - b)z_x^\varepsilon \, dxdt$ en dos partes:

$$A(\varepsilon) = \int_\tau^T \int_{-\infty}^{\infty} w(b^\varepsilon - b)z_x^\varepsilon \, dxdt$$

y

$$B(\varepsilon) = \int_\tau^T \int_{-\infty}^{\infty} w(b^\varepsilon - b)z_x^\varepsilon \, dxdt.$$

En el paso 4. logramos acotar z_x^ε por C_s en la franja $(\tau, T) \times \mathbb{R}$ por lo que

$$\begin{aligned} |A(\varepsilon)| &\leq \int_\tau^T \int_{-\infty}^{\infty} |w(b^\varepsilon - b)||z_x^\varepsilon| \, dxdt \\ &\leq C_s \int_\tau^T \int_{-\infty}^{\infty} |w||(b^\varepsilon - b)| \, dxdt \end{aligned}$$

y el teorema de la convergencia dominada nos dice que $A(\varepsilon) \to 0$.

Por otra parte, por la observación hecha antes de enunciar el paso 5. sabemos que

$$\begin{aligned} |B(\varepsilon)| &\leq \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} |w(b^\varepsilon - b)||z_x^\varepsilon| \, dxdt \\ &\leq \tau C \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_{-\infty}^{\infty} |z_x^\varepsilon(t, x)| \, dxdt \\ &\leq \tau C \|z_x(t_2, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para algún $t_2 \in [0, \tau]$ fijo. Con esto hemos probado que

$$\int_{R_+^2} w\psi \, dxdt = 0$$

y como ψ es una función de prueba arbitraria concluimos que $u - v = w$ es cero en casi todo punto que es lo que queríamos. $\square$

Pasamos ahora a enunciar otro concepto de utilidad en el estudio de los sistemas de leyes de conservación.

Definición 4. *Sean $G : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ y $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ dos funciones. El par ordenado (G, F) se llama un par de entropía para el sistema equilibrado si en cada $u \in \mathcal{O}$ se cumple*

$$\nabla G(u) \cdot \nabla f(u) = \nabla F(u)$$

A G se el conoce como la entropía y a F como el flujo de entropía.

Esto quiere decir que para cada $u \in \mathcal{O}$ y cada $k \in \{1, ..., n\}$ tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j}(u) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u).$$

Teorema 6. *Si u es solución de (1) y (G, F) es un par de entropía para (1) entonces en $\mathbb{R}^{2+}$ se cumple*

$$G(u)_t + F(u)_x \equiv 0$$

Demostración. Usando la regla de la cadena y la observación anterior, en cada punto (x, t) de $\mathbb{R}^{2+}$ tenemos

$$\begin{aligned} F(u)_x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(u(x,t)) \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j}(u(x,t)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u(x,t)) \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t) \end{aligned}$$

Ahora bien, como u es solución de (1) entonces para cada $j \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u(x,t)) \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t)$$

de donde

$$\begin{aligned} G(u)_t &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j}(u(x,t)) \frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j}(u(x,t)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u(x,t)) \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t) \end{aligned}$$

Sumando se obtiene la igualdad que queriamos. □

Este teorema nos sugiere el análogo de la condición de entropía para las soluciones débiles de (1):

Definición 5. *Decimos que una solución débil del sistema equilibrado es entrópica si existe un par de entropía (G, F) de (1) con G convexa en $\mathcal{O}$ tal que*

$$-\int_{\mathbb{R}^2_+} G(u) \cdot \phi_t + F(u) \cdot \phi_x \, dtdx \leq 0$$

para toda $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^N)$.

Que G sea convexa en $\mathcal{O}$ significa que si $u, v \in \mathcal{O}$ entonces para cada $s \in [0, 1]$ se cumple

$$G((1-s)u + sv) \leq (1-s)G(u) + sG(v).$$

aquí adquiere sentido la exigencia de que el abierto $\mathcal{O}$ sea convexo pues necesitamos que si u y v están en $\mathcal{O}$ entonces el segmento $[u, v]$ esté contenido también en $\mathcal{O}$ para poder evaluar G.

Definición 6. *Decimos que un conjunto* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ *es un dominio positivamente invariante para el sistema equilibrado si posee la siguiente propiedad: Si* u *es una solución clásica de* (1) *entonces*

$$u(0,x) \in \mathcal{C}\ \forall x \in \mathbb{R} \textit{ implica } u(t,x) \in \mathcal{C}\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Es natural definir los dominios positivamente invariantes para (2) como los conjuntos $\mathcal{F}$ que satisfacen la siguiente condición

$$z(0,x,\xi) \in \mathcal{F}\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R} \times X \text{ implica } z(t,x,\xi) \in \mathcal{F}\ \forall (t,x,\xi) \in \mathbb{R}^2_+ \times X.$$

Si vemos a $\mathcal{F}$ como un conjunto de funciones $z : X \to \mathbb{R}^N$, la definición de dominio positivamente invariante para (2) será muy similar a la análoga para el sistema equilibrado:

Definición 7. *Un conjunto de funciones* $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}^N\}$ *es un dominio positivamente invariante para* (2) *si cumple*

$$z_0(x) \in \mathcal{F}\ \forall x \in \mathbb{R} \textit{ implica } z(t,x) \in \mathcal{F}\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2_+$$

donde entendemos que $z_0(x)(\xi) = z_0(x,\xi)$ *y* $z(t,x)(\xi) = z(t,x,\xi)$.

Necesitaremos un último concepto: si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es lineal y $V \subseteq \mathbb{R}^N$ entonces decimos que V es *estable* o *invariante* para T si $T(V) \subseteq V$. Además, para cada $p \in V$ el espacio tangente a V en el punto p es el conjunto $T_p(V)$ dado por

$$T_p(V) = \{\alpha'(0) \in \mathbb{R}^N | \alpha : (-\delta,\delta) \to V \text{ es derivable en 0 con } \alpha(0) = p\}.$$

4 Resultados

Trabajaremos bajo tres hipótesis:

(H1). Existe un conjunto convexo compacto $K \subseteq \mathcal{O}$, con frontera de clase C^2 e interior no vacío, que es un dominio positivamente invariante para el sistema equilibrado. Este K cumple además que en cada $u \in \partial K$ el plano tangente $T_u(\partial K)$ es estable para $\nabla f(u)$.

(H2). Podemos asociar al sistema equilibrado un sistema de la forma (2) donde M es una función Maxwelliana de (1) en el compacto K de (H1). Esto significa que se satisfacen las condiciones (M1)-(M4) para M.

(H3) El sistema equilibrado (1) posee un par de entropía flujo (G, F) con la entropía G estrictamente convexa en $\mathcal{O}$.

La condiciones que exigimos al convexo compacto K de (H1) se deben a que éstas son las hipótesis necesarias para obtener la conclusión del siguiente teorema:

Teorema 7 (Serre). *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), los dominios $K_\xi := M_\xi(K)$ son convexos y $M_\xi : K \to K_\xi$ es un difeomorfismo global para todo $\xi \in X$.*

Demostración. La prueba de este importante resultado se puede encontrar en el artículo [9]. □

Observemos que cada K_ξ es compacto por ser la imagen de un compacto bajo una función continua de modo que K_ξ es en realidad un dominio convexo y compacto.

Teorema 8. *Supongamos que el dato inicial en* (2) *satisface* $z_0(t, x) \in K$. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), para cada $\epsilon > 0$, el sistema relajado admite una única solución local en el tiempo.*

Demostración. Sea $Y = L^\infty([0, T] \times \mathbb{R} \times X)$. Consideremos el operador $\mathcal{L} : Y \to Y$ dado por

$$\mathcal{L}(z) = S_t(z_0) + \int_0^t S_{t-\tau}(M_\xi(u(\tau, x)) - z(\tau, x, \xi))\, d\tau$$

donde S_t es el semigrupo asociado a la ecuación homogénea

$$z_t + a(\xi)z_x = 0, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^2_+ \times X.$$

Omitiremos el superíndice ϵ, que estará fijo durante toda la prueba, pero siempre estamos suponiendo $z = z^\epsilon$, $u = u^\epsilon = \int_X z^\epsilon\, d\mu(\xi)$.

Usaremos el argumento usual que consiste en probar que $\mathcal{L}$ es una contracción en un espacio métrico completo y de este modo poseerá un único punto fijo z^ϵ que es solución local de (2).

Como $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times X)$ entonces para cualquier $T > 0$ podemos suponer $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R} \times X)$. El espacio completo que buscamos será un bola cerrada $\overline{B}_Y(z_0, R)$ de centro en z_0 y un radio adecuado R.

La función $[0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto \|S_t\|_{\mathcal{B}(Y)}$ es contínua por ser S_t un semigrupo, luego $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|S_t\|_{\mathcal{B}(Y)} < \infty$. Por lo tanto, si $z_i \in \overline{B}_Y(z_0, R)$ para $i = 1, 2$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{L}(z_1) - \mathcal{L}(z_2)\|_Y \\
&= \left\| \int_0^t S_{t-\tau}(M_\xi(u_1(\tau,x)) - z_1(\tau,x,\xi)) - S_{t-\tau}(M_\xi(u_2(\tau,x)) - z_2(\tau,x,\xi))\, d\tau \right\|_Y \\
&\leq \left\| \int_0^t S_{t-\tau}[M_\xi(u_1(\tau,x)) - M_\xi(u_2(\tau,x)) - (z_1(\tau,x,\xi)) - z_2(\tau,x,\xi))]\, d\tau \right\|_Y \\
&\leq \int_0^t \big\| S_{t-\tau}[M_\xi(u_1) - M_\xi(u_2) - (z_1 - z_2)] \big\|_Y \, d\tau \\
&\leq T\big(\sup_{t\in[0,T]} \|S_t\|_{\mathcal{B}(Y)}\big)\big[\|M_\xi(u_1) - M_\xi(u_2)\|_Y + \|z_1 - z_2\|_Y \, d\tau\big]
\end{aligned}
$$

Debemos acotar la cantidad $\|M_\xi(u_1) - M_\xi(u_2)\|_Y$. Como M es una maxweliana de (1) entonces M es acotada respecto ξ, además M es de clase C^2 respecto a u y por tanto es localmente Lipchiciana. Recordemos también que X es un espacio de probabilidad, luego para un R adecuado

$$\|M_\xi(u_1) - M_\xi(u_2)\|_Y \leq C\mathrm{sup}|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \int_X d\mu(\xi) \leq C\|z_1 - z_2\|_Y.$$

En particular, existe una constante (que seguimos denotando C) que cumple

$$\|\mathcal{L}(z_1) - \mathcal{L}(z_2)\|_Y \leq TC\|z_1 - z_2\|_Y.$$

De aquí es claro que para una elección adecuada de T tenemos que $\mathcal{L}$ es una contracción y por tanto tiene un único punto fijo z que es solución de (2). $\square$

Para que la solución local en el tiempo que hemos encontrado en el teorema anterior sea global basta probar que ésta es acotada. Este resultado se tiene si existe un dominio positivamente invariante para (2) ya que hemos supuesto que $z_0 \in L^\infty$.

Sea $\mathcal{F} = \{\varphi : X \to \mathbb{R}^N : \varphi(\xi) \in K_\xi \text{ para todo } \xi \in X\}$.

Veamos primero que para todo $\varphi \in \mathcal{F}$ tenemos

$$\int_X \varphi(\xi)\, d\mu(\xi) \in K.$$

Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^N$

$$A := \left\{ \int_X M(u,\xi)\, d\mu(\xi) : u \in K \right\}.$$

Gracias a (M1) tenemos $u = \int_X M(u,\xi)\,d\mu(\xi)$ para todo $u \in K$ luego $K = A$.

Tomemos ahora $\varphi \in \mathcal{F}$. Por la definición de $\mathcal{F}$ sabemos que $\varphi(\xi) \in K_\xi = M_\xi(K)$. Por lo tanto,

$$\int_X \varphi(\xi)\,d\mu(\xi) = \int_X M_\xi(u)\,d\mu(\xi) \in K$$

y esto prueba nuestra afirmación.

De este resultado se deduce que $\mathcal{F}$ es un dominio positivamente invariante para (2). La prueba detallada se encuentra en [9] y por tanto la omitimos.

Teorema 9. *Supongamos que el dato inicial del sistema relajado satisface*

$$z_0(x,\xi) = z_0(x)(\xi) \in K_\xi \qquad \textit{para todo} \qquad \xi \in X.$$

Entonces (2) *posee una solución única global en el tiempo* $z^\epsilon : \mathbb{R}^2_+ \times X \to \mathbb{R}^N$ *tal que* $z^\epsilon(t,x)(\xi) \in K_\xi$ *para todo* $\xi \in X$.

Demostración. La hipótesis significa que $z_0(x) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un dominio positivamente invariante para (2) y z_0 es acotada entonces la solución local z^ϵ del teorema 8 es acotada y por tanto puede extenderse a todo el semiplano $\mathbb{R}^2_+$, esto es, z^ϵ es una solución global de (2). La condición, $z^\epsilon(t,x)(\xi) \in K_\xi$ para todo $\xi \in X$, se deduce inmediatamente de la invarianza de $\mathcal{F}$. $\square$

Notemos que si tenemos un dato unicial dado $u_0(x)$ entones la hipótesis (H1) asegura la existencia de un dominio positivamente invariante K tal que $u_0(x) \in K$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el dato inicial $z_0(x,\cdot) = M(u_0(x),\cdot)$ pertenece al dominio positivamente invariante $\mathcal{F}$. Así pues, el teorema 9 asegura la existencia de soluciones globales en el tiempo para el sistema

$$\begin{cases} z^\epsilon_t + a(\xi) z^\epsilon_x = \frac{1}{\epsilon}(M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon), \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}^2_+ \times X \\ \\ u^\epsilon(t,x) = \int_X z^\epsilon(t,x,\xi)\,d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2_+ \\ \\ z^\epsilon(0,x,\xi) = M(u_0(x),\xi), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R} \times X \end{cases} \tag{10}$$

Observemos que el dato inicial $M(u_0(x),\cdot)$ no depende de ϵ. Con esto nuestro problema consiste en hacer ϵ tender a cero y controlar la cantidad $\frac{1}{\epsilon}(M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)$ para obtener soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} z_t + a(\xi) z_x = 0, \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}^2_+ \times X \\ \\ u(t,x) = \int_X z(t,x,\xi)\,d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2_+ \\ \\ z(0,x,\xi) = M(u_0(x),\xi), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R} \times X \end{cases} \tag{11}$$

El dato inicial no será problema porque basta integrar y usar (M1) para obtener

$$u_0(x) = \int_X z(0, x, \xi)\, d\mu(\xi).$$

De este modo con la solución de (11) recuperamos el dato inicial de (1). El inconveniente es que si $\epsilon \to 0$ las soluciones z^ϵ del problema (10) tienden a una función z y no lo hacen fuertemente de modo que z no tiene porqué ser una solución clásica de (11). Aún así podemos obtener a partir de esta función z una solución entrópica de (1).

Vamos a construir primero pares de entropía que nos permitan hacer algunas estimaciones adecuadas de $M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon$. Para esto será necesario el siguiente hecho técnico:

Teorema 10. *Todo autovector de $\nabla f(u)$ es un autovector de $\nabla M_\xi(u)$ para todo $\xi \in X$, posiblemente para un autovalor diferente.*

Demostración. Sea $r_k(u)$ un autovector de $\nabla f(u)$ correspondiente al autovalor $\lambda_k(u)$. Tomamos $s_k(u) = \nabla M_\xi(u) \cdot r_k(u)$. Gracias a (M4) tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla f(u) \cdot s_k(u) &= \nabla f(u) \cdot \nabla M_\xi(u) \cdot r_k(u) \\
&= \nabla M_\xi(u) \cdot \nabla f(u) \cdot r_k(u) \\
&= \lambda_k(u) \nabla M_\xi(u) \cdot r_k(u) \\
&= \lambda_k(u) s_k(u).
\end{aligned}$$

Luego, $s_k(u)$ está en el espacio propio $E(\lambda_k(u))$ donde

$$E(\lambda_k(u)) := \{v \in \mathbb{R}^n : \nabla f(u) \cdot v = \lambda_k(u) v\}.$$

Como (1) es hiperbólico cada $E(\lambda_k(u))$ tiene dimensión uno luego $r_k(u)$ es un generador de $E(\lambda_k(u))$ y obtenemos

$$s_k(u) = \alpha r_k(u)$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Así pues,

$$\nabla M_\xi(u) \cdot r_k(u) = s_k(u) = \alpha r_k(u).$$

Es decir, $r_k(u)$ es un autovector de $\nabla M_\xi(u)$ correspondiente al autovalor α. Observemos que no necesariamente $\alpha = \lambda_k(u)$. Como $u \in \mathcal{O}$, $\xi \in X$ y $r_k(u)$ fueron arbitrarios, el teorema queda probado. $\square$

Sea (G, F) el par de entropía de (1) cuya existencia suponemos en la hipótesis (H3). Sabemos que para cada $u \in \mathcal{O}$ existe una base de R^N formada por autovectores $r_1(u), ..., r_N(u)$ de $\nabla f(u)$. Usando la notación del teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla M_\xi(u) \cdot r_k(u) &= \alpha r_k(u) \\
&= \frac{\alpha}{\lambda_k(u)} \lambda_k(u) r_k(u) \\
&= \frac{\alpha}{\lambda_k(u)} \nabla f(u) \cdot r_k(u)
\end{aligned}$$

de modo que las transformaciones lineales $\nabla M_\xi(u)$ y $\nabla f(u)$ se diferencian sobre cada espacio propio $E(\lambda_k(u))$ por constantes. Aunque hemos razonado con las aplicaciones lineales $\nabla M_\xi(u)$ y $\nabla f(u)$ definidas a derecha, los mismos argumentos funcionan con los autovectores izquierdos que son los que necesitamos. Así pues, G es una entropía para la ecuación

$$w_t + M_\xi(w)_x = 0 \tag{12}$$

aunque los flujos no necesariamente coinciden con F. Si denotamos F_ξ al flujo de entropía de (12) entonces (G, F_ξ) es un par de entropía flujo para la ecuación (12) y podemos definir

$$e_\xi := F_\xi \circ M_\xi^{-1}.$$

Notemos que la composición está bien definida pues el rango de M_ξ^{-1} es $\mathcal{O}$ que coincide con el dominio de G, M_ξ y F_ξ. Además, por el teorema de Serre las funciones M_ξ^{-1} son difeomorfismos locales de clase C^2 por lo que e_ξ es una función de clase C^2 también.

Teorema 11. *Si (G, F_ξ) es un par de entropía flujo para (12) entonces*

$$\nabla^2(e_\xi \circ M_\xi) = \nabla^2 G$$

donde ∇^2 denota la matriz Hessiana.

Demostración. Por la definición de e_ξ tenemos que

$$F_\xi = e_\xi \circ M_\xi.$$

Si calculamos los gradientes usando la regla de la cadena y tenemos en cuenta que (G, F_ξ) es un par de entropía flujo para (12) obtenemos

$$\nabla e_\xi(M_\xi(w))\nabla M_\xi(w) = \nabla(e_\xi \circ M_\xi)(w) = \nabla F_\xi(w) = \nabla G(w)\nabla M_\xi(w).$$

Ahora bien, la condición (M3) de la Maxweliana nos dice que el espectro de $\nabla M_\xi(w)$ está contenido en $(0, \infty)$. Por lo tanto, $\nabla M_\xi(w)$ es invertible y concluimos que

$$\nabla(e_\xi \circ M_\xi(w)) = \nabla e_\xi(M_\xi(w)) = \nabla G(w)$$

para todo $w \in \mathcal{O}$. Diferenciando nuevamente y usando regla de la cadena obtenemos la conclusión del teorema. $\square$

Recordemos ahora un hecho de la teoría de funciones convexas: una función de clase C^2 definida en un conjunto convexo es estrictamente convexa si y sólo si su matriz Hessiana es definida positiva.

Recordemos que hemos supuesto en (H3) que G es una función estrictamente convexa. Una consecuencia de esto es el teorema siguiente que permita concluir la convexidad estricta de $e_\xi \circ M_\xi$ a partir de la convexidad estricta de G. Basta con tener en cuenta la relación entre las Hessianas dada por el teorema anterior y el resultado sobre funciones convexas que acabamos de enunciar.

Teorema 12. *La Hessiana $\nabla^2(e_\xi \circ M_\xi)$ es una matriz definida positiva.*

Demostración. Sabemos que $e_\xi \circ M_\xi$ es una función de clase C^2. Hemos supuesto en (H1) que el dominio positivamente invariante K es convexo. Además la entropía G es una función convexa, por hipótesis. Por la tanto la matriz Hessiana $\nabla^2 G(u)$ es definida positiva en cada $u \in \mathcal{O}$ pero esta matriz coincide con $\nabla^2(e_\xi \circ M_\xi)$ por el teorema anterior. Luego, la Hessiana de $e_\xi \circ M_\xi$ es definida positiva y esto concluye la prueba. $\square$

Vale la pena resaltar que del teorema anterior deducimos también que e_ξ es convexa en K porque su Hessiana es definida positiva.

Una observación de vital importancia para el siguente teorema es que e_ξ no depende de ϵ. Esto es debido a que M_ξ es independiente de ϵ y F_ξ es el flujo de la ecuación (12) que fue construida a partir de M_ξ, es decir, F_ξ tampoco depende de ϵ.

Teorema 13. *Existe una constante positiva c, independiente de ϵ, tal que*

$$\int_X e_\xi(M_\xi(u))\,d\mu(\xi) + \int_X \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))\,d\mu(\xi)$$
$$\leq \int_X e_\xi(\varphi(\xi))\,d\mu(\xi) - c\int_X |M_\xi(u) - \varphi(\xi)|^2\,d\mu(\xi)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{F}$ y todo $u \in K$.

Demostración. Consideremos una función $\varphi \in \mathcal{F}$. Recordemos que esto significa que $\varphi : X \to \mathbb{R}^N$ cumple $\varphi(\xi) \in K_\xi$ para todo $\xi \in X$. Esta condición es importante para poder evaluar $e_\xi(\varphi(\xi))$.

Si usamos la expansión de Taylor de e_ξ de primer orden en el convexo K_ξ obtenemos, para cualquier $u \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned} e_\xi(\varphi(\xi)) &= e_\xi(M_\xi(u)) + \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u)) \\ &+\frac{1}{2}\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))^2 + R(\varphi(\xi) - M_\xi(u)) \end{aligned} \tag{13}$$

donde $|R(\varphi(\xi) - M_\xi(u))| \leq C|\varphi(\xi) - M_\xi(u)|^3$ para algún $C > 0$. Gracias a la convexidad de e_ξ tenemos que

$$e_\xi(\varphi(\xi)) \geq e_\xi(M_\xi(u)) + \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))^2 + R(\varphi(\xi) - M_\xi(u)) \geq 0.$$

Pero $\frac{1}{2}\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))^2 \geq 0$ luego debemos tener que

$$\frac{1}{2}\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u))\cdot(\varphi(\xi)-M_\xi(u))^2+R(\varphi(\xi)-M_\xi(u)) \geq k\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u))\cdot(\varphi(\xi)-M_\xi(u))$$

para alguna constante $k > 0$.

Reemplazando en (13) obtenemos

$$\begin{aligned} e_\xi(\varphi(\xi)) \geq\ & e_\xi(M_\xi(u)) + \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u)) \\ & + k\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))^2. \end{aligned}$$

Nuevamente gracias a que $\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u))$ es definida positiva obtenemos una constante $\lambda > 0$ tal que

$$\nabla^2 e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u))^2 \geq \lambda |\varphi(\xi) - M_\xi(u)|^2.$$

Tomando $c = k\lambda$ conseguimos

$$e_\xi(\varphi(\xi)) \geq e_\xi(M_\xi(u)) + \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u)) + c|\varphi(\xi) - M_\xi(u)|^2.$$

Tanto k como λ dependen exclusivamente de e_ξ, es decir, son independientes de ϵ lo cual significa que c tampoco depende de ϵ. Todo lo anterior nos conduce finalmente a que

$$e_\xi(M_\xi(u)) + \nabla e_\xi(M_\xi(u)) \cdot (\varphi(\xi) - M_\xi(u)) \leq e_\xi(\varphi(\xi)) - c|\varphi(\xi) - M_\xi(u)|^2.$$

Para conseguir el resultado que queremos basta integrar sobre X la desigualdad anterior. □

Ahora usaremos estos resultados generales en el caso particular de la solución del sistema (10).

Teorema 14. *Sea $z^\epsilon(t,x) \in \mathcal{F}$ la solución del problema* (10) *obtenida en el teorema 9. Entonces, existe una constante $c > 0$, independiente de ϵ, tal que*

$$\int_X e_\xi(M_\xi(u^\epsilon))\, d\mu(\xi) \leq \int_X e_\xi(z^\epsilon)\, d\mu(\xi) - c \int_X |M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon|^2\, d\mu(\xi)$$

Demostración. Usando el teorema anterior sólo falta verificar que

$$\int_X \nabla e_\xi(M_\xi(u^\epsilon)) \cdot (z^\epsilon - M_\xi(u^\epsilon))\, d\mu(\xi) = 0.$$

Notemos primero que $\nabla e_\xi(M_\xi(u^\epsilon)) = \nabla G(u^\epsilon)$ no depende de ξ por lo que basta ver que

$$\int_X z^\epsilon - M_\xi(u^\epsilon)\, d\mu(\xi) = 0.$$

Ahora bien, en el problema (10) tenemos que

$$u^\epsilon(t,x) = \int_X z^\epsilon(t,x,\xi)\, d\mu(\xi) = \int_X z^\epsilon(t,x)(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Pero además la condición (M1) de la Maxweliana nos dice que

$$\int_X M_\xi(u^\epsilon(t,x))\, d\mu(\xi) = u^\epsilon(t,x),$$

luego

$$\int_X z^\epsilon(t,x)(\xi)\,d\mu(\xi) - \int_X M_\xi(u^\epsilon(t,x))\,d\mu(\xi) = u^\epsilon(t,x) - u^\epsilon(t,x) = 0$$

como queríamos probar. $\square$

Definamos dos funcionales $E : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ y $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$E(\varphi) = \int_X e_\xi(\varphi(\xi))\,d\mu(\xi) \quad \text{y} \quad H(\varphi) = \int_X a(\xi) e_\xi(\varphi(\xi))\,d\mu(\xi).$$

Teorema 15. *Para toda u^ϵ tenemos*

$$E(M_\xi(u^\epsilon)) = G(u^\epsilon)$$

Demostración. Consideremos la función $h(v) = \int_x M_i(v)\,d\mu(\xi)$. Dado que (G, F_ξ) es un par de entropía flujo para (12) entonces

$$\begin{aligned}
\nabla G(v) \cdot \nabla h(v) &= \nabla G(v) \cdot \int_X \nabla M_\xi(v)\,d\mu(\xi) \\
&= \int_X \nabla G(v) \cdot \nabla M_\xi(v)\,d\mu(\xi) \\
&= \nabla \int_X F_\xi(v)\,d\mu(\xi)
\end{aligned}$$

Observemos que $h(v)$ es la identidad sobre K por la hipótesis (M1), entonces

$$\nabla G(v) = \nabla \int_X F_\xi(v)\,d\mu(\xi)$$

de donde $G(v)$ y $\int_X F_\xi(v)\,d\mu(\xi)$ difieren en una constante. Esta constante la podemos tomar nula porque esto no genera ningún cambio en el hecho de que (G, F_ξ) es un par de entropía para (12).

Así pues, en particular para cada u^ϵ obtenemos

$$\begin{aligned}
E(M_\xi(u^\epsilon)) &= \int_X e_\xi(M_\xi(u^\epsilon))\,d\mu(\xi) \\
&= \int_X F_\xi(u^\epsilon)\,d\mu(\xi) = G(u^\epsilon)
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Un razonamiento completamente análogo permite demostrar que

$$H(M_\xi(u^\epsilon)) = F(u^\epsilon)$$

para toda u^ϵ.

Vamos a calcular las derivadas de estos funcionales cuando $\varphi(\xi) = z^\epsilon(t,x)(\xi)$. Para $E(z^\epsilon(t,x))$ calculamos la derivada respecto a la variable temporal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E(z^\epsilon(t,x)) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_X e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi) \\
&= \int_X \frac{\partial}{\partial t} e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi) \\
&= \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot z_t^\epsilon(t,x)(\xi)\, d\mu(\xi)
\end{aligned}$$

mientras que para $H(z^\epsilon(t,x))$ calculamos la derivada respecto a la variable espacial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} H(z^\epsilon(t,x)) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_X a(\xi) e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi) \\
&= \int_X a(\xi) \frac{\partial}{\partial x} e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi) \\
&= \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot (a(\xi) z_x^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $z^\epsilon(t,x)$ es la solución de (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E(z^\epsilon(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x} H(z^\epsilon(t,x)) &= \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot z_t^\epsilon(t,x)(\xi)\, d\mu(\xi) \\
&\quad + \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot (a(\xi) z_x^\epsilon(t,x)(\xi))\, d\mu(\xi) \\
&= \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot (z_t^\epsilon + a(\xi) z_x^\epsilon)\, d\mu(\xi) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot ((M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)\, d\mu(\xi).
\end{aligned}$$

Integrando directamente y considerando la hipótesis adicional

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \int_X e(z_0^\epsilon(x,\xi))\, d\mu(\xi) dx < \infty \tag{14}$$

tendremos que si z^ϵ es la solución de (10) entonces $\frac{\partial}{\partial t} E(z^\epsilon(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x} H(z^\epsilon(t,x))$ es acotado en $L^1([0,T] \times \mathbb{R})$ para todo tiempo $T > 0$.

Teorema 16. *Bajo las condiciones del teorema 14 tenemos*

$$\|M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times X)} = O(\sqrt{\epsilon})$$

para todo $T > 0$.

Demostración. Como e_ξ es convexa sabemos que

$$e_\xi(M_\xi(u^\epsilon)) - e_\xi(z^\epsilon(t,x,\xi)) \geq \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot ((M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon).$$

Si usamos el teorema 14 conseguimos la acotación

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi))\cdot((M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon)\,d\mu(\xi) &\leq \frac{1}{\epsilon}\int_X e_\xi(M_\xi(u^\epsilon))-e_\xi(z^\epsilon(t,x,\xi))\,d\mu(\xi)\\
&\leq \frac{-c}{\epsilon}\int_X |M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon|^2\,d\mu(\xi).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{\partial}{\partial t}E(z^\epsilon(t,x))+\frac{\partial}{\partial x}H(z^\epsilon(t,x))\leq \frac{-c}{\epsilon}\int_X |M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon|^2\,d\mu(\xi),
$$

o lo que es lo mismo

$$
\int_X |M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon|^2\,d\mu(\xi)\leq -\frac{\epsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}E(z^\epsilon(t,x))+\frac{\partial}{\partial x}H(z^\epsilon(t,x))\right).
$$

Para terminar de probar el teorema basta integrar respecto a t en $[0,T]$ y respecto a x en $(-\infty,\infty)$. Por la observación que hicimos antes del teorema concluimos

$$
\|M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times X)}=\bar{c}\epsilon. \quad \square
$$

Necesitaremos otra acotación similar pero que involucre las funciones $f(u^\epsilon)$ y $a(\cdot)z^\epsilon$. Para conseguirla usaremos el teorema anterior.

Teorema 17. *Sea* $z^\epsilon(t,x)\in\mathcal{F}$ *la solución del problema* (10) *obtenida en el teorema 9. Si llamamos*

$$
v^\epsilon=\int_X a(\xi)z^\epsilon(t,x,\xi)\,d\mu(\xi)
$$

entonces

$$
\|f(u^\epsilon)-v^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R})}=O(\sqrt{\epsilon}).
$$

Demostración. Por una parte tenemos

$$
\begin{aligned}
\|f(u^\epsilon)-v^\epsilon\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T |f(u^\epsilon)-v^\epsilon|^2\,dt\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \left|\int_X a(\xi)M_\xi(u^\epsilon)\,d\mu(\xi)-\int_X a(\xi)z^\epsilon\,d\mu(\xi)\right|^2 dt\,dx
\end{aligned}
$$

Debemos tener en cuenta que $a(\xi)$ es acotada luego $|a(\xi)|\leq c$ para todo $\xi\in X$. Recordemos también que X es un espacio de probabilidad, luego, aplicando la desigualadad de Jensen tenemos

$$
\begin{aligned}
\|f(u^\epsilon)-v^\epsilon\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R})} &\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T\int_X |M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon|^2\,dt\,dx\\
&= c\|M_\xi(u^\epsilon)-z^\epsilon\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times X)}.
\end{aligned}
$$

y basta con aplicar el teorema 16. $\square$

Con estos teoremas será suficiente para demostrar el resultado principal de nuestro trabajo que consiste en usar las técnicas de la compacidad compensada para probar justificar la existencia del límite cuando $\epsilon \to 0$.

Teorema 18. *Bajo las hipótesis (H1)-(H3) y la hipótesis adicional* (14)*, la sucesión* (u^ϵ) *es relativamente compacta en* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *y toda función* u *de la adherencia es una solución entrópica de* (1)*.*

Demostración. Probemos primero que la sucesión $\partial_t G(u^\epsilon) + \partial_x F(u^\epsilon)$ está en un compacto de H^{-1}_{loc}. Para tal efecto fijemos un compacto $D \subseteq \mathbb{R}^2_+$ y escojamos $T > 0$ tal que $D \subseteq [0,T] \times \mathbb{R}$.

Teniendo presente que

$$\frac{\partial}{\partial t} E(z^\epsilon(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x} H(z^\epsilon(t,x)) = \frac{1}{\epsilon} \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot ((M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)\, d\mu(\xi).$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \partial_t G(u^\epsilon) + \partial_x F(u^\epsilon) &= \partial_t (G(u^\epsilon) - E(z^\epsilon)) + \partial_x (F(u^\epsilon) - H(z^\epsilon)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot ((M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)\, d\mu(\xi) \end{aligned}$$

Queremos analizar cada uno de los sumandos que aparecen en el lado derecho de la última igualdad.

Gracias al teorema 15 tenemos que

$$|G(u^\epsilon) - E(z^\epsilon)|^2 = |E(M_\xi(u^\epsilon)) - E(z^\epsilon)|^2$$

Como la función $x \mapsto x^2$ es convexa podemos usar la desigualdad de Jensen para concluir

$$\begin{aligned} |G(u^\epsilon) - E(z^\epsilon)|^2 &\leq \int_X |e_\xi(z^\epsilon) - e_\xi(M_\xi(u^\epsilon))|^2\, d\mu(\xi) \\ &\leq \int_X |\nabla e_\xi(M_\xi(u^\epsilon)) \cdot (M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)|^2\, d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Como $\nabla e_\xi(M_\xi(u^\epsilon)) = \nabla F_\xi$ es acotado sobre D porque F_ξ es de clase C^2 entonces

$$\|G(u^\epsilon) - E(z^\epsilon)\|_{L^2(D)} \leq c\|M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times X)} = O(\sqrt{\epsilon})$$

y esto implica que el término $\partial_t(G(u^\epsilon) - E(z^\epsilon))$ converge a cero en $L^2(D)$ del orden de $\sqrt{\epsilon}$.

Usando el teorema 17 junto con la acotación de $a(\xi)$ se prueba exactamente del mismo modo que

$$\|\partial_x(F(u^\epsilon) - H(z^\epsilon))\|_{L^2(D)} = O(\sqrt{\epsilon}).$$

Ahora bien, en la prueba del teorema 16 justificamos por qué el término

$$\frac{1}{\epsilon} \int_X \nabla e_\xi(z^\epsilon(t,x)(\xi)) \cdot ((M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon)\, d\mu(\xi)$$

está acotado en $L^1(D)$. Por el Lema de Murat la sucesión $\partial_t G(u^\epsilon) + \partial_x F(u^\epsilon)$ está en un compacto de H^{-1}_{loc} como queriamos demostrar.

Por otro lado, la sucesión (u^ϵ) está formada por funciones que toman sus valores en el compacto K y por tanto es una sucesión acotada en L^∞. Tenemos entonces que la sucesión (u^ϵ) es acotada en $L^p(D)$, con $p < \infty$. En efecto, si

$$A = \sup\{\|x\| : x \in K\}$$

entonces

$$\|u^\epsilon\|_{L^p(D)} \leq \left(\int_D A^p \, d(t,x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq A(\mathrm{Vol}(D))^{\frac{1}{p}}.$$

Gracias a que $L^p(D)$ es reflexivo tenemos que la sucesión (u^ϵ) es relativamente compacta. Denotemos por u al límite de una subsucesión de (u^ϵ). Podemos aplicar el teorema 3 para justificar la existencia de una subsucesión, que seguiremos denotando (u^ϵ), y una familia de medidas de probabilidad $\nu_{(t,x)}$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ con $\mathrm{Sop}(\nu_{(t,x)} \subseteq K$ tal que si

$$\overline{f}(t,x) = \int_K f(\lambda) \, d\nu_{(t,x)}(\lambda)$$

entonces

$$f(u^\epsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Si es posible probar, como en [4], que estas medidas de probabilidad $\nu_{(t,x)}$ se reducen a medidas de Dirac concentradas en $u(t,x)$, para casi todo punto (t,x), con lo cual tendremos

$$f(u^\epsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u),$$

esto es, en la topología débil estrella de L^∞. Con esto hemos demostrado que u es una solución de (1) en el sentido distribucional.

Ahora bien, la acotación

$$\int_X |M_\xi(u^\epsilon) - z^\epsilon|^2 \, d\mu(\xi) \leq -\frac{\epsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}E(z^\epsilon(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x}H(z^\epsilon(t,x))\right)$$

hecha en la prueba del teorema 16 nos muestra que

$$\frac{\partial}{\partial t}E(z^\epsilon(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x}H(z^\epsilon(t,x)) \leq 0.$$

Por lo tanto, $\partial_t G(u^\epsilon) + \partial_x F(u^\epsilon)$ es la suma de una expresión negativa con una distribución que tiende a cero en H^{-1}. Tomando el límite tendremos

$$\partial_t G(u) + \partial_x F(u) \leq 0.$$

Luego, u es una solución entrópica de (1).

$\square$

5 Conclusiones

- Es posible probar la existencia de soluciones débiles entrópicas para ciertos sistemas de leyes de conservación estrictamente hipérbolicos por medio de la asociación de sistemas relajados que involucran familias de funciones, llamadas Maxwelianas, con propiedades que permiten recuperar soluciones del sistema original mediante procesos de integración y paso al límite en topologías apropiadas.

- La técnica de compacidad compensada es adecuada para justificar que las sucesiones de soluciones de sistemas relajados poseen límites que son a su vez soluciones de los sistemas en equilibrio.

6 Problemas para estudio posterior

- Hemos visto en el teorema 5 que la condición de entropía permite demostrar la unicidad de las soluciones débiles de los sistemas de leyes de conservación. Estas soluciones no tienen porqué ser entrópicas en el sentido de la definición 5. La pregunta en este caso es ¿cuál es la condición de entropía que asegura la unicidad de las soluciones entrópicas?

- ¿Bajo qué hipótesis es posible encontrar soluciones débiles que además de ser únicas permitan demostrar el buen planteamiento del sistema de leyes de conservación?. Es decir, ¿cuáles son las condiciones adicionales que debemos imponer a las soluciones para probar la dependencia continua con respecto a los datos iniciales?

- Los datos iniciales de los sistemas que trabajamos son acotados. ¿si comenzamos con datos iniciales no acotados es posible demostrar los mismos resultados por medio de la técnica de compacidad compensada?

Esperamos poder continuar con este trabajo para buscar respuesta a estos interrogantes.

Referencias Bibliográficas

[1] Benoit, Perthame. *Kinetic Formulations of Conservation Laws.* Oxford, Lecture Notes in Mathematics and its applications. 21 (2002).

[2] Chen, G. Frid, H. *Decay of entropy solutions of nonlinear conservation laws.* Mathematics subject clasification, Primary 35L65,35B40,35L80. 1991.

[3] Evans, Lawrence. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Matehematics, Vol 19. American Mathematical Society. 1998.

[4] Frid, H. *Compacidade compensada aplicada às leis de conservaçao.* Colóquio 19 Brasileiro de Matemática. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. IMPA.

[5] Natilini, R. Lattanzio, C. *Convergence of diffusive BGK approximations for nonlinear strongly parabolic systems.* Procedings of the Royal Society of Edimburg, **132.A** (2002) 341-358.

[6] Renardy, M. Rogers, R. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, TAM 13. 1993.

[7] Rendón,L. Frid, H. *Asymptotic stability of Riemann Solutions in BGK approximations to certain multidimensional systems of conservation laws.*

[8] Loss, M. Lieb, E. *Analysis.* Graduate Studies in Mathematics. Vol 14. AMS. 2001.

[9] Serre, D. *Relaxations semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire 17.2 (2000) 169-192.

[10] Smoller, J. *Shock Waves and Reaction-Difussion Equations.* Springer Verlag. 1983.

[11] Tartar, L. *Compensate compactness and aplications to partial differential equations.* Research notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics. R. J. Knops, Pitman Press. 4 (1979) 136-211.