

## CAPÍTULO 11

### CIRCULO DE MOHR

#### 11.1 ESFUERZOS EN EL SUELO ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

Notación:

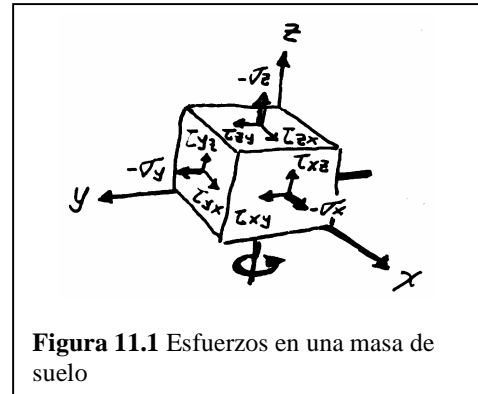
$\sigma$  = Sigma = Esfuerzo normal o directo a la superficie.

$\tau$  = Tau = Esfuerzo de cizalladura o cortante a la superficie.

$\sigma > 0$  = Compresión;  $\sigma < 0$  = Tracción.

$\tau_{zx}$  = Cortante en la dirección X, sobre el plano Z (el plano Z es el plano X - Y).

$\sigma_z$  = Esfuerzo normal y en la dirección Z.



**Figura 11.1** Esfuerzos en una masa de suelo

Sobre las caras del cubo existen 9 elementos (fig. 11.1), las que se pueden escribir así:

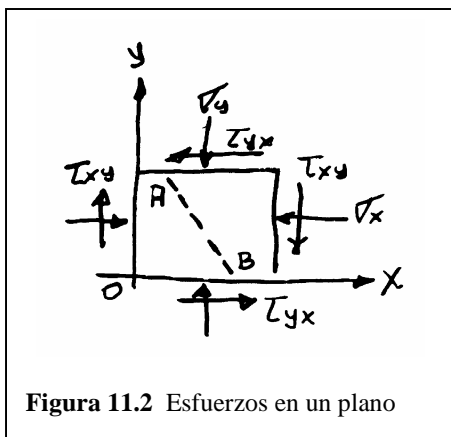
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \sigma = \text{Tensor general de esfuerzos en } R^3 \quad (11.1)$$

Tomando momentos (esfuerzo, por área, por distancia) para hacer rotar el cubo en torno a un eje central paralelo al eje Z e igualando a 0 (cero), tenemos que  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  son los dos esfuerzos que pueden hacerlo.

$$[\tau_{xy} * a^2 * a/2] - [\tau_{yx} * a^2 * a/2] = 0$$

entonces:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (11.2)$$



**Figura 11.2** Esfuerzos en un plano

Reduciendo el problema a dos dimensiones únicamente, (11.1) puede escribirse con sólo 3 componentes y no 4, según (11.2).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \sigma = \text{Tensor de esfuerzos en } R^2 \quad (11.3)$$

En el plano Z (o X,Y), se dibuja las 4 componentes del esfuerzo. En este caso  $\sigma_x, \sigma_y$  compresivos.  $\tau_{yx}$  se ha hecho  $\tau_{xy}$ . Entonces, de las 4 componentes del esfuerzo, tres son independientes: Las de la ecuación (11.3).

La ecuación (11.3) y la ecuación (11.1) se pueden expresar, para los esfuerzos principales, en  $R^2$  y  $R^3$ , así:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Los tensores expresados en (11.4) suponen una rotación del sistema, hasta que los cortantes se hagan nulos ( $\tau_{ij} = 0$ ), según lo visto en la Sección 10.6.

### 11.2 ESFUERZOS EN UN PLANO.

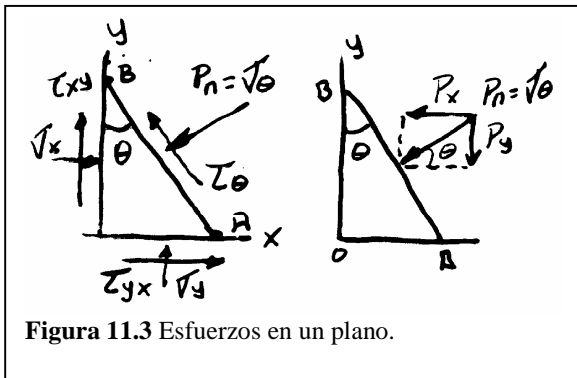


Figura 11.3 Esfuerzos en un plano.

El problema es que, conocido el tensor en  $R^2$ , calcular  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo del plano con el eje Y (o del esfuerzo normal al plano, con el eje X).

NOTA: La matriz de cosenos directores en  $R^2$  es la del coseno del ángulo de  $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$  con  $(X, Y)$ :

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos'x & \cos'y \\ \cos'y' & \cos'y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos(90^\circ + \theta) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Para (11.9)

Considerando el equilibrio estático, la  $\Sigma F = 0$  .:

$$AB P_X = OB \sigma_X + OA \tau_{XY}; \quad AB P_Y = OA \sigma_X + OB \tau_{XY} \quad (11.6)$$

$$\text{Pero} \quad OA = AB \text{ sen}\theta \quad OB = AB \text{ cos}\theta \quad (11.7)$$

Llevo (11.7) a (11.6) y cancelo AB

$$P_X = T_X \text{ cos}\theta + \tau_{XY} \text{ sen}\theta \quad P_Y = \sigma_Y \text{ cos}\theta + \tau_{XY} \text{ sen}\theta \quad (11.8)$$

$$\text{Pero a) } \sigma_n = P_X \text{ cos}\theta + P_Y \text{ sen}\theta \quad \text{b) } \tau_n = P_Y \text{ cos}\theta - P_X \text{ sen}\theta \quad (11.9)$$

(11.8) en (11.9) .: teniendo en cuenta (11.2) y aplicando la identidad de las fórmulas 11.17:

$\sigma_\theta = \sigma_X \text{ cos}^2\theta + 2\tau_{xy} \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta + \sigma_Y \text{ sen}^2\theta$  que se transforma

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \text{ cos } 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta \quad (11.10)$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} (\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\theta \quad (11.11)$$

$$\text{además, } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (11.12)$$

Por convención, los esfuerzos principales son  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . En  $\mathbb{R}^2$   $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (11.13)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (11.14)$$

A veces es conveniente el análisis de los ejes X e Y en la dirección de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , entonces de (10) y (11), cuando  $\tau_{xy} = 0$ :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (11.15)$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} 2\theta \quad (11.16)$$

(11.10) – (11.11) – (11.13) – (11.14) – (11.15) y (11.16) se denominan “ECUACIONES PARAMÉTRICAS”

IDENTIDAD	$\operatorname{Cos} 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{Cos} 2\theta)$	$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{Cos} 2\theta)$	(11.17)
-----------	---	---	---------

**11.2.1 El plano de máximo esfuerzo de cizalladura:** Se encuentra con la ecuación (11.16); en ella  $\tau_{\theta}$  es máximo cuando  $\operatorname{sen} 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 45^\circ \quad (11.18)$$

**11.2.2 Esfuerzo hidrostático:** Cuando  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (en  $\mathbb{R}^3$ ) y no existe cortante en el material ( $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ). En este caso sólo existe cambio de volumen, elástico o permanente.

**11.2.3. Esfuerzo octaédrico:**  $\sigma_{oct} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$  (11.19)

**11.2.4 Esfuerzo desviador  $\sigma'$ :** Sobre un esfuerzo es del tipo hidrostático, puede darse un esfuerzo adicional normal y en una dirección, llamado esfuerzo desviatorio  $\sigma'$ , que para la dirección 1 es:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \bar{\sigma} = \sigma_1 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{3} \\ \sigma'_2 &= \frac{(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)}{3} \\ \sigma'_3 &= \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{3} \end{aligned} \right\}$$

igualmente:

(11.20)

NOTA: El octaédrico es un invariante

### 11.3 CÍRCULO DE MOHR (Estado bidimensional, $R^2$ )

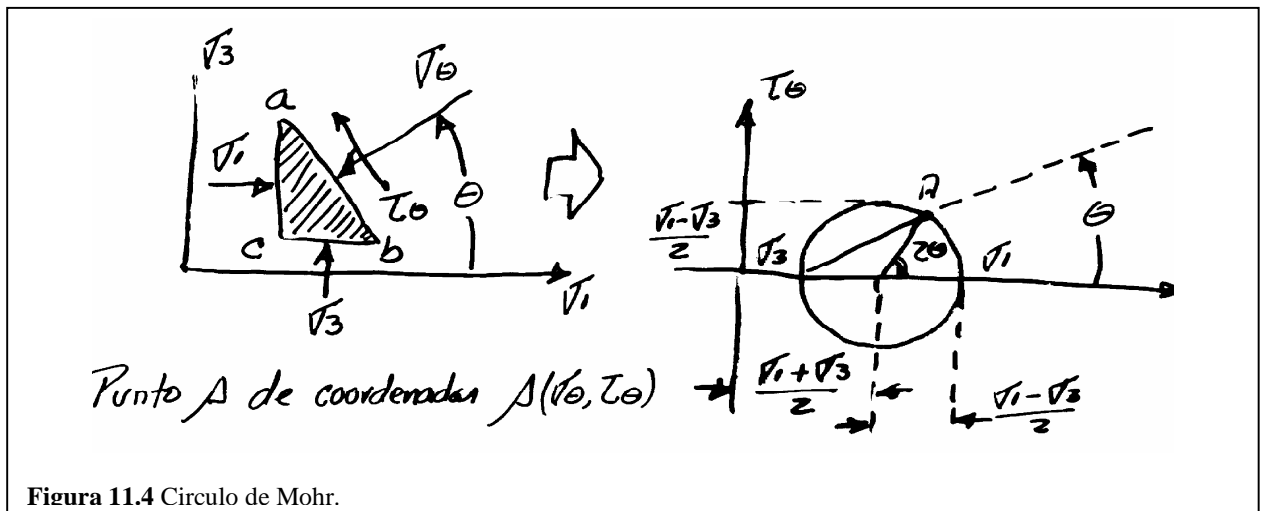


Figura 11.4 Círculo de Mohr.

Consideremos el estado de esfuerzos en el PLANO PRINCIPAL de  $\sigma_3$ , plano en el que actúan los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , ver Sección 10.6. Asumamos  $\sigma > 0$  en compresión y  $\tau > 0$  en dirección retrógrada. El esfuerzo desviador es la magnitud  $\sigma_1 - \sigma_3$ , diámetro del CÍRCULO DE MOHR, cuyo centro es  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , con ordenada  $\tau = 0$  en el plano considerado y que definimos como plano  $\sigma_\theta, \tau_\theta$ .

Dada la magnitud y dirección de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  se pueden calcular los esfuerzos normal  $\sigma_\theta$  y tangencial  $\tau_\theta$ , en cualquier PLANO  $ab$  con dirección  $\theta$  medida en sentido retrógrado a partir de  $\sigma_\theta$ , así:

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (11.21)$$

$$\tau_\theta = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (11.22)$$

Comparando (11.21) y (11.22) con las ecuaciones (11.10), (11.11), (11.15) y (11.16), vemos que se ha tomado  $\sigma_3$  por  $\sigma_2$ , para asociarlas al círculo de Mohr.

Entonces, EL CÍRCULO DE MOHR tiene por circunferencia el lugar geométrico de puntos, como A, que representan los esfuerzos sobre un plano, cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$ . El punto A representa al plano  $ab$ .

**POLO.** La noción de polo es de gran utilidad para las construcciones gráficas del CÍRCULO DE MOHR.

El polo es un punto del círculo de Mohr designado por P, con la siguiente propiedad única: una línea trazada a partir del polo paralela a un plano dado en el suelo, cortará el círculo de Mohr en un punto cuyas coordenadas corresponden a las componentes  $\sigma$  y  $\tau$  del esfuerzo en ese plano.

En consecuencia, existe una relación entre:

1. El estado de esfuerzos en cualquier plano.
2. La dirección de dicho plano del suelo.
3. La posición del polo en el círculo de Mohr.

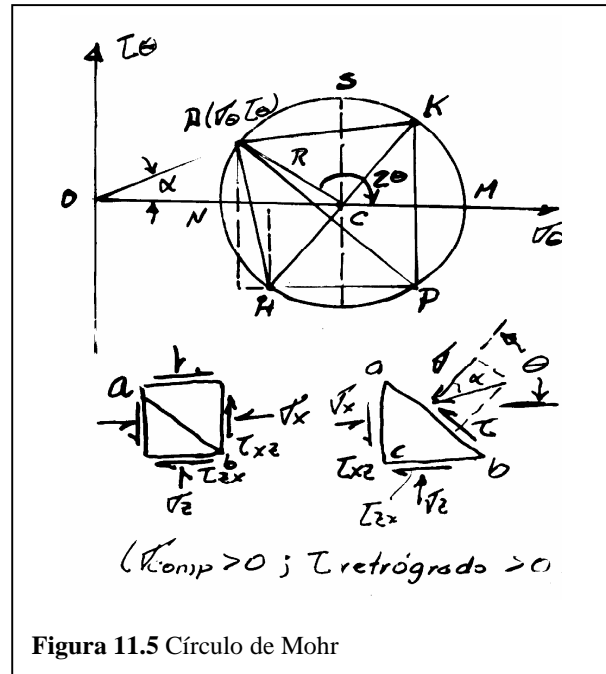


Figura 11.5 Círculo de Mohr

### Ejemplo 11.1:

El punto H tiene coordenadas  $(\sigma_z, -\tau_{zx})$  que definen el estado de esfuerzos en cb, por lo que, al trazar por H la línea HP, paralela a cb, obtengo el polo P.

El punto K tiene coordenadas  $(\sigma_z, \tau_{zx})$  que definen el estado de esfuerzos en ac, por lo que al trazar por K la línea KP, paralela a ac, obtengo el polo P.

Ambos puntos P son el mismo; sólo existe un polo P único en el círculo de Mohr.

En consecuencia, al trazar por P una línea PA, paralela a ab, obtengo el punto A, cuyas coordenadas son  $\sigma_\theta$ ;  $\tau_\theta$  (ambos positivos).

El ángulo  $\alpha$  que hace  $\sigma_\theta$  con la resultante de  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$ , es el ángulo AON.

Los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son OM y ON.  $\tau_{\text{m\u00e1ximo}}$  es  $CS = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$ .

El ángulo  $\theta$ , es diferente al ángulo  $\alpha$  y vale la mitad del arco ASM

El esfuerzo resultante ab está dado por  $\sqrt{\sigma_\theta^2 + \tau_\theta^2}$

El  $\tau_{\text{m\u00e1ximo}}$  es el radio del círculo de Mohr y este esfuerzo tangencial se produce en planos que forman  $45^\circ$  con el esfuerzo normal mayor  $\sigma_1$ .

Si el estado de ESFUERZOS es GEOSTÁTICO, los  $\tau_{\max}$  estarán sobre planos que hacen  $45^\circ$  con el horizonte y la magnitud de  $\tau_{\max}$ , dependerá de K, el COEFICIENTE DE PRESIÓN DE TIERRAS

Si  $K = 1 \Rightarrow \tau_{\max} = 0$       donde  $K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$

Si  $K \neq 1 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{2}(K - 1)$

**Ejercicios 11.2** Para las figuras I y II dadas, obtenga los esfuerzos en el plano mn.

Solución gráfica (Para I y II)

1)  $\sigma_1 = 4 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_3 = 2 \text{ Kg/cm}^2$

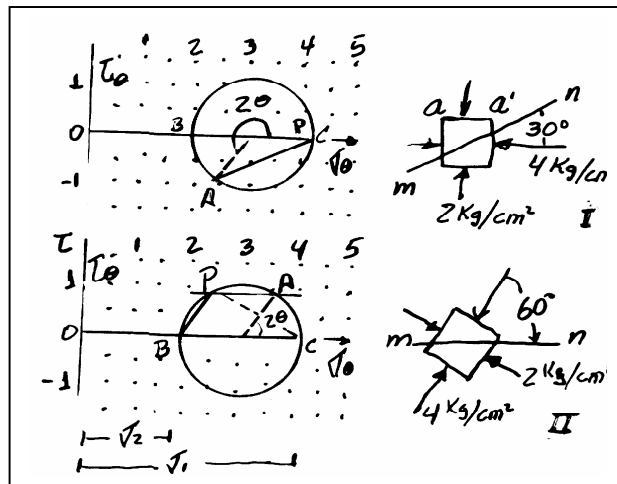
2) dibujo el círculo de Mohr.

3)  $\tau_{\max} = R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 1 \text{ Kg/cm}^2$

4) Por 2,0 trazo BP paralela al plano sobre el cual actúa el esfuerzo 2,0  $\Rightarrow \sigma = 2$ ;  $\tau = 0$

5) Obtengo el polo P donde la paralela BP corta el círculo.

6) Por P trazo el plano PA paralelo a "mn" para obtener el punto A.



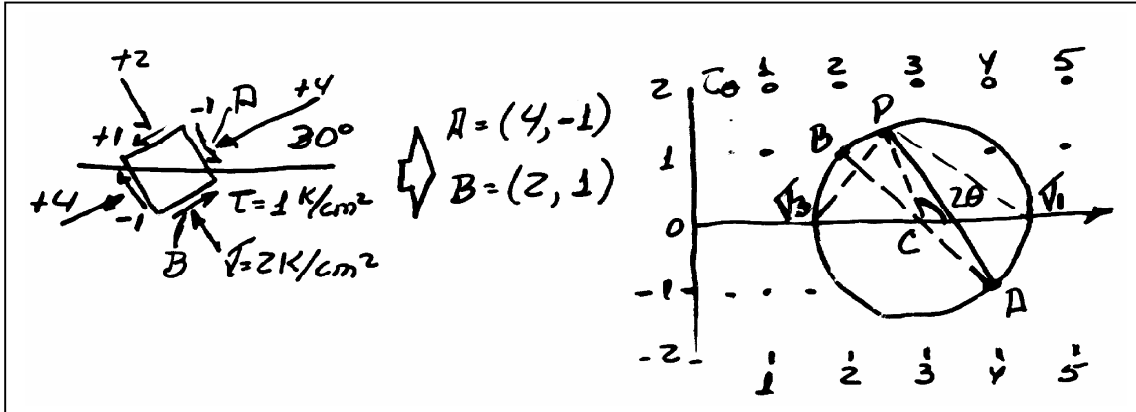
7) Leemos las coordenadas de A, punto que representa al plano mn, esto es:

Caso I :  $\sigma_\theta = 2,5 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_\theta = -0,87 \text{ Kg/cm}^2$        $\theta = 120^\circ$

Caso II :  $\sigma_\theta = 3,5 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_\theta = 0,87 \text{ Kg/cm}^2$        $\theta = 30^\circ$

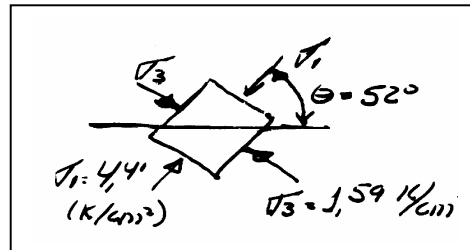
Otra solución: Los pasos 1, 2 y 3 iguales, lo mismo los pasos 6 y 7. El paso 4 puede ser: Por 4,0 trazo CP paralela al plano sobre el cual actúa el esfuerzo 4,0. El paso 5, obtener con CP el polo P y listo.

**Ejercicio 11.3.** Obtener gráfica y analíticamente  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\theta$  de la figura:



#### Solución gráfica.

- 1) Sitúo en el plano los puntos A(4, -1) y B(2, 1), que son las caras A y B. Los signos,  $\sigma > 0$  en compresión y  $\tau > 0$  en sentido retrógrado.
- 2) El diámetro y el radio, gráficamente son definibles, a partir de A y B.
- 3) Por A, trazo AP paralela a la cara A, para obtener el polo P. (Este paso también puede ser: Por B trazo BP paralela a la cara B).
- 4) Uno  $P\sigma_1$  y  $P\sigma_3$ . Estas son dos rectas paralelas a los planos principales sobre los que actúan  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , de magnitudes ya conocidas.
- 5) En el círculo ya se lee  $PC\sigma_0 = 2\theta$  y  $P\sigma_2\sigma_1 = \theta$
- 6) Dibujo el elemento de suelo, con  $\theta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  de acuerdo al círculo de Mohr obtenido.



#### Solución analítica

Con las ecuaciones 11.12, 11.13, 11.14, tenemos:

$$\theta' = \frac{1}{2} \operatorname{ar\,tg} \left[ \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{ar\,tg} \left[ \frac{-2(-1)}{(4-2)} \right] = +22^\circ 30' \quad (*)$$

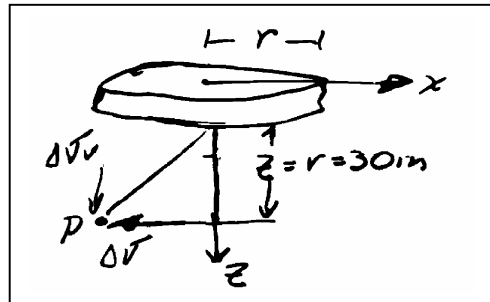
$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = \frac{1}{2}(4+2) + \frac{1}{2}[(4-2)^2 + 4(1)^2]^{1/2} = 4,41 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = \frac{1}{2}(4+2) - \frac{1}{2}[(4-2)^2 + 4(1)^2]^{1/2} = 4,41 \text{ Kg/cm}^2 = 1,59 \text{ Kg/cm}^2$$

(\*) Como el ángulo  $\theta$  real es el que hace  $\sigma_1$  con el horizonte, entonces

$$\theta \text{ o } 30^\circ + \theta' = 30^\circ + (+22^\circ \frac{1}{2}) = 52^\circ \frac{1}{2}$$

**Ejercicio 11.4.** Se tiene una carga de 25 Ton/m<sup>2</sup> uniformemente repartida sobre una superficie circular de 30m de radio. Para una profundidad Z = 30m bajo el borde de la superficie cargada calcular el  $\Delta\sigma_n$  y las direcciones de  $\Delta\sigma_1$  y  $\Delta\sigma_2$ . Para  $\sigma_v$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  (ábacos Figuras 10.14 y 10.17)



**Solución:** Se dibuja el círculo de Mohr con los  $\Delta\sigma$ , y con una horizontal por  $\Delta\sigma_x$  localizo el polo P.

- a) Ábacos:  $\frac{Z}{r} = 1$  y  $\frac{x}{r} = 1$ : (ábacos III de LAMBE Figura 10.17)

$$\frac{\Delta\sigma_1}{q} = 0,44; \quad \frac{\Delta\sigma_3}{q} = 0,04; \quad \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3}{q} = 0,40 \quad (\text{borde del tanque y } Z = r)$$

(borde del tanque y  $Z = r$ )

- 
- $\Delta\sigma_1 = 0,44q = 0,44(25) = 11 \text{ TT/m}^2$  incremento en  $\sigma_1$
- $\Delta\sigma_2 = 0,04q = 0,04(25) = 1 \text{ TT/m}^2$  incremento en  $\sigma_2$

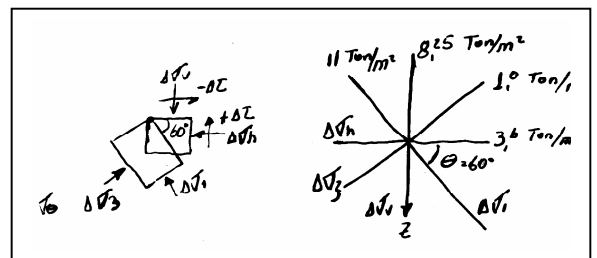
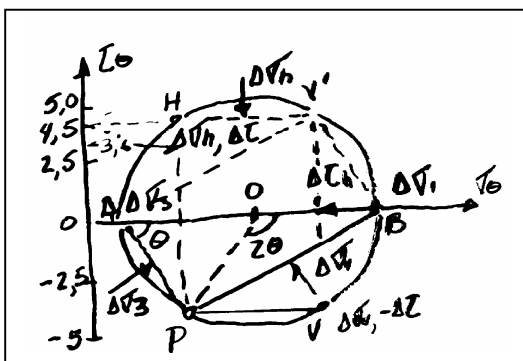
- b) Ábaco Foster – Ahlvin (donde R es X)

$$\frac{Z}{r} = 1; \quad \frac{X}{r} = 1 \Rightarrow I_0 = 0,33 \quad (\text{para borde del tanque y } Z = r)$$

$$\Delta\sigma_v = q I_0 = 25(0,33) = 8,25 \text{ TT/m}^2 \quad \text{incremento en } \sigma_v$$

Como  $\Delta\sigma_2 < \Delta\sigma < \Delta\sigma_1$  existe cortante  $\tau$  sobre el plano horizontal.

- c) Construcción del círculo de Mohr:



$$R = \frac{11-1}{2} = 5; \quad O = \frac{11+1}{2} = 6$$

Con  $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_v = 8,25$  obtengo  $VV'$



Por la simetría del círculo, existen dos puntos con diferente  $\tau$ . Escojo V con  $\tau < 0$ .

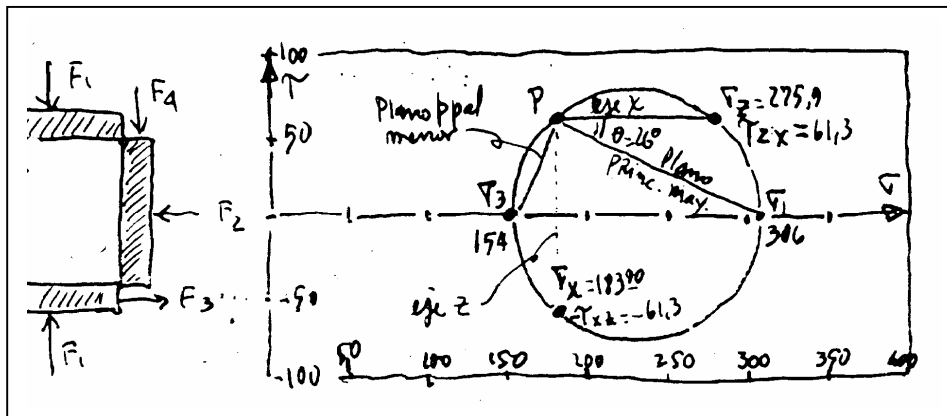
Con VP || horizonte, obtengo P (polo).

Con PH  $\perp$  al horizonte obtengo H. Se lee  $\Delta\sigma_h = 3,6$ ;  $\Delta\tau = 4,5$

Uniendo P con A y B obtengo los planos principales. El ángulo  $\theta$ , de  $V_i$  con X:

$$\sigma_i \text{ actúa sobre el plano BP. Luego } \theta = \text{ángulo BAP} = \text{ar tg} \left[ \frac{4,5}{3,6-1,0} \right] = -60^\circ$$

**Ejercicio 11.5.** Con la figura, las cargas normales aplicadas en las caras de un cubo de suelo son  $F_1 = 45 \text{ Kg}$  y  $F_2 = 30 \text{ Kg}$ ; las cargas cortantes son  $F_3 = F_4 = 10 \text{ Kg}$ . La arista de suelo es de 40 mm. Construya el círculo de Mohr de los esfuerzos totales y obtenga los planos y esfuerzos.



Solución

Se definen los ejes X y Z de la figura y se tienen como base la dirección de  $F_1, F_2, F_3, F_4$ .

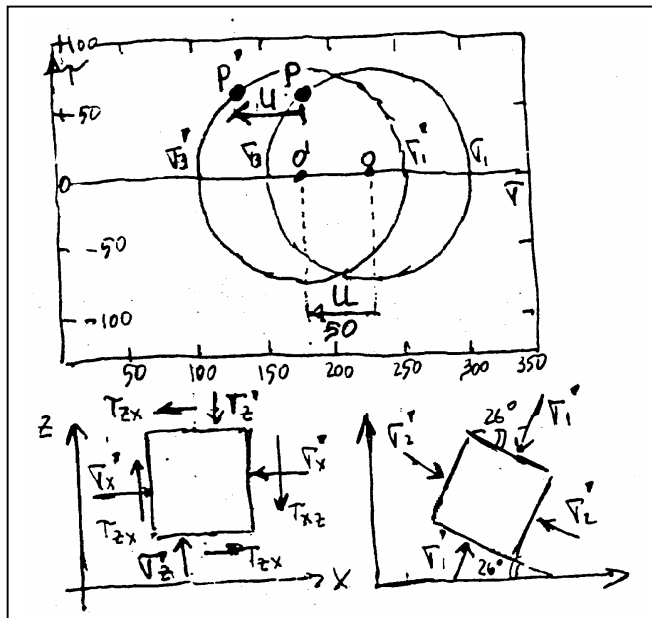
Luego se calculan

$$\sigma_x = F_2/A = 183,9 \text{ KN/m}^2$$

$\sigma_z = F_1/A = 275,9 \text{ KN/m}^2$  y el cortante  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = F_3/A = 611,3 \text{ KN/m}^2$ .  $\tau_{xz} < 0$  por el sentido negativo y  $\tau_{zx} > 0$  por el sentido retrógrado.

El polo P se localiza desde  $(\sigma_z; \tau_{zx})$  y el plano principal mayor genera  $\theta = 26^\circ$  con X.

**Ejercicio 11.6.** Partiendo de los esfuerzos totales del cubo del ejercicio anterior, y conociendo que la presión de poros es  $U = 50 \text{ KN/m}^2$ , construya el círculo de Mohr de los esfuerzos efectivos. Dibuje el polo en el nuevo círculo, de esfuerzos efectivos, y dibuje los cubos sobre cuales caen los esfuerzos efectivos normales y cortantes.



de poros es  $U = 50 \text{ KN/m}^2$ , construya el círculo de Mohr de los esfuerzos efectivos. Dibuje el polo en el nuevo círculo, de esfuerzos efectivos, y dibuje los cubos sobre cuales caen los esfuerzos efectivos normales y cortantes.

Solución: El agua no tiene resistencia al corte.  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 61,3 \text{ KN/m}^2$ .

Además,  $OO' = U = 50 \text{ KN/m}^2$ .



Para calcular A, calculo  $\beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - 2\theta = 180^\circ - 94^\circ,77 = 85^\circ,23$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_y}{2} - R \cos \beta = 0,2313q - 0,0176q = 0,2137q$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_y}{2} + R \cos \beta = 0,2313q + 0,0176q = 0,2489q$$

$$\tau_{xy} = R^2 \operatorname{sen} \beta = 0,2115q * \operatorname{sen} 85^\circ 23 = 0,2108q$$

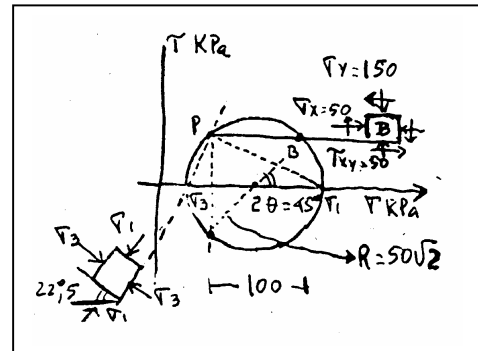
**Ejercicio 11.8.** Dado el plano B con los esfuerzos  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  en KPa (150, 50 y 50); calcular  $\theta$ , el polo,  $\sigma_1, \sigma_2$  y su orientación.

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{-2 * 50}{50 - 150} \right) = 22^\circ,5$$

Fórmula 11.12

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = 100 + 70,7 = 170,7 \text{ KPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = 100 - 70,7 = 29,3 \text{ KPa}$$



ESTADOS ESPECIALES DE ESFUERZOS

	<p>Compresión triaxial simple, <math>\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z, \tau = 0</math></p>		<p>Tracción y compresión iguales  <math>\sigma_z = 0, \sigma_x = -\sigma_y</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x</math>  <math>\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_x/2</math></p>
	<p>Compresión biaxial igual  <math>\sigma_x = \sigma_y</math> pero <math>\sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x/2 = \sigma_y/2</math></p>		<p>Cortante puro y plano  <math>\sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y</math></p>
	<p>Tracción simple  <math>\sigma &lt; 0</math> pero <math>\sigma_y = \sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x/2</math></p>		
	<p>Tracción con presión lateral  <math>\sigma_y = \sigma_z = -\sigma_x</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{xy} = \tau_{xz}</math></p>		

Figura 11.6 Estados especiales de esfuerzos



**11.4 DIAGRAMA p – q:**

Para dibujar una trayectoria de esfuerzos, de un ensayo, no es fácil el dibujar una sucesión de círculos de Mohr, por lo que la literatura moderna utiliza los diagramas p – q, donde cada círculo tiene un punto de coordenadas (p, q), cuya sucesión da la TRAYECTORIA DE ESFUERZOS.

Si  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  y  $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{\max}$  puedo dibujar las siguientes trayectorias:

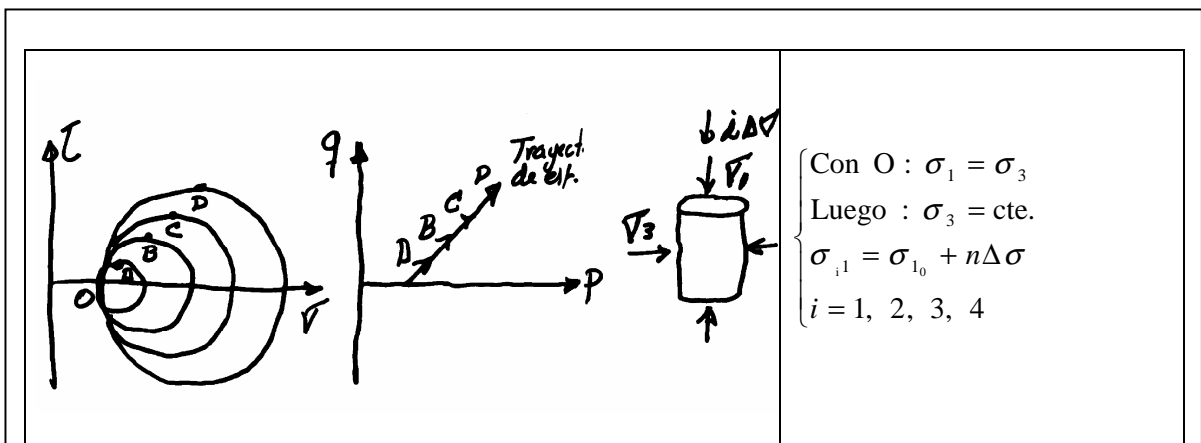


Figura 11.8. I Trayectorias de esfuerzos.

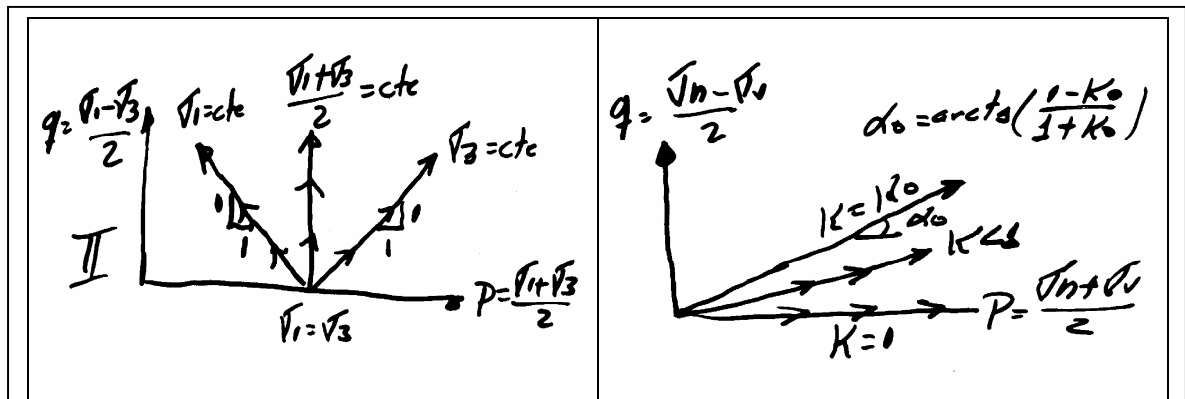


Figura 11.9 Trayectorias de esfuerzos

Regresar a Contenido  
del libro M d S